ÁLGEBRA LINEAR CC

Exercícios - Álgebra Vetorial

Lic. Ciências da Computação **2025/2026**

5.1. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ com o produto escalar. Mostre que, para quaisquer $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

(a) $u \mid v = v \mid u$.

(b) $u \mid (v + w) = u \mid v + u \mid w$.

(c) $u \mid \alpha v = \alpha(u \mid v) = (\alpha u) \mid v$.

(d) $0_{\mathbb{R}^n} \mid u = 0 = u \mid 0_{\mathbb{R}^n}$.

(e) $u \mid u \geq 0$ e $u \mid u = 0$ se e só se $u = 0_{\mathbb{R}^n}$.

5.2. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ com o produto escalar. Sejam $u = (4, 1, 2, 3), v = (0, 2, 1, -2)$, $w = (3, 1, 0, 2) \in \mathbb{R}^4$. Calcule:

(a) $u \mid v$. (b) $v \mid u$. (c) $u \mid (3w)$. (d) $(-v) \mid (-w)$.

(e) $u \mid (v + w)$. (f) $\|u\|$. (g) $\|u + v\|$. (h) $\| - 2u\| + 3\|v\|$.

(i) $d(u, v)$. (j) $\dfrac{1}{\|w\|}w$. (k) $\left\|\dfrac{1}{\|w\|}w\right\|$.

5.3. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ com o produto escalar. Para que valores de k podemos afirmar que $\| kv \| = 5$, se $v = (-2, 3, 0, 6)$?

5.4. Prove que, para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^n$:

(a) $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$.

(b) $u \mid v = \frac{1}{4}\|u + v\|^2 - \frac{1}{4}\|u - v\|^2$.

5.5. Determine a distância entre os pontos P e Q, sabendo que:

(a) $P = (1, -1)$ e $Q = (7, 7)$.

(b) $P = (1, 1, -1)$ e $Q = (2, -1, 5)$.

5.6. Determine o ângulo formado pelos vetores:

(a) $u = (1, 1, 0)$ e $v = (1, 2, 1)$, em $\mathbb{R}^3$;

(b) $u = (1, 0, 0, 0, 0)$ e $v = (1, 1, 1, 1, 1)$, em $\mathbb{R}^5$.

5.7. Para cada um dos subespaços V de $\mathbb{R}^n$ a seguir indicados, determine uma base ortonormada de V:

(a) Em $\mathbb{R}^3$, $V =< (-1, 3, 2) >$.

(b) Em $\mathbb{R}^3$, $V =< (0, 1, -1), (2, 1, 0) >$.

(c) Em $\mathbb{R}^3$, $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2x + 5y - z = 0\}$.

(d) Em $\mathbb{R}^4$, $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x - z = 0, 2x - y + w = 0\}$.

5.8. Sejam V_1 e V_2 subespaços de $\mathbb{R}^n$. Mostre que:

(a) Se $V_1 \subseteq V_2$, então $V_2^\perp \subseteq V_1^\perp$.
(b) Se $V_1^\perp = V_2^\perp$, então $V_1 = V_2$.
(c) $U^\perp + V^\perp \subseteq (U \cap V)^\perp$.

5.9. Para cada um dos subespaços V de $\mathbb{R}^n$ a seguir indicados, determine o complemento ortogonal de V:

(a) Em $\mathbb{R}^3$, $V =< (-1, 3, 2) >$.
(b) Em $\mathbb{R}^3$, $V =< (0, 1, -1), (2, 1, 0) >$.
(c) Em $\mathbb{R}^3$, $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2x + 5y - z = 0\}$.
(d) Em $\mathbb{R}^4$, $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - z = 0, 2x - y + w = 0\}$.

5.10. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do produto escalar. Seja (v_1, v_2, v_3) uma base ortonormada de um subespaço vetorial V de $\mathbb{R}^4$.

(a) Determine:
   i. $v_1 \mid (v_2 + v_3)$.
   ii. $\|2v_1 + v_2 - v_3\|$.
   iii. $\angle(v_2 - v_3, v_1 - v_2)$.
(b) Determine o complemento ortogonal de:
   i. $W_1 =< v_1 + v_3, v_1 - 2v_2 + v_3 >$.
   ii. $W_2 = \{a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 \in \mathbb{R}^4 \,|\, a_1 + a_2 - a_3 = 0, a_1 - a_3 = 0\}$.

5.11. Sejam V o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $< (1, 0, 0), (0, 1, 0) >$ e $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Mostre que $\text{proj}_V u = (a, b, 0)$.

5.12. Seja V um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Mostre que

(a) Se $u \in V$, então $\text{proj}_V u = u$.
(b) Se $u \in V^T$, então $\text{proj}_V u = 0_{\mathbb{R}^n}$.

5.13. Para cada um dos seguintes subespaços V de $\mathbb{R}^n$ e para o vetor $u \in \mathbb{R}^n$ indicado, determine $\text{proj}_V u$ e decomponha u na forma $u_1 + u_2$, onde $u_1 \in V$ e $u_2 \in V^T$.

(a) Em $\mathbb{R}^3$, $V =< (-1, 3, 2) >$, $u = (2, 2, -3)$.
(b) Em $\mathbb{R}^3$, $V =< (0, 1, -1), (2, 1, 0) >$, $u = (1, 0, 2)$.
(c) Em $\mathbb{R}^3$, $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2x + 5y - z = 0\}$, $u = (2, -1, 1)$.
(d) Em $\mathbb{R}^4$, $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - z = 0, 2x - y + w = 0\}$, $u = (-1, 1, 2, 0)$.

5.14. Em cada uma das alíneas seguintes, determine a distância mínima do ponto P ao subespaço V de $\mathbb{R}^n$ indicado.

(a) $P = (-2, 3, 1)$, $V =< (-1, 4, 4), (2, -1, 0) >$ em $\mathbb{R}^3$.
(b) $P = (4, -1, 2)$, $V =< (-2, 3, -3) >$ em $\mathbb{R}^3$.
(c) $P = (2, 3, -3, 1)$, $V =< (-1, 2, -1, 1), (2, -1, 1, -1) >$ em $\mathbb{R}^4$.
(d) $P(-1, 4, -2, 2)$, $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 2x - 3z + w = 0\}$.