ÁLGEBRA LINEAR CC

Exercícios - Espaços vetoriais

Lic. Ciências da Computação **2025/2026**

3.1. Seja $n \in \mathbb{N}$. Considere o conjunto $\mathbb{R}^n$ algebrizado com as aplicações $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definidas, respetivamente, por

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n),$$

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n),$$

para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Mostre que são válidas as seguintes propriedades:

(1) $\forall_{x,y \in \mathbb{R}^n} \quad x + y = y + x$;

(2) $\forall_{x,y,z \in \mathbb{R}^n} \quad x + (y + z) = (x + y) + z$;

(3) $\forall_{x \in \mathbb{R}^n} \quad x + 0_{\mathbb{R}^n} = x = 0_{\mathbb{R}^n} + x$;

(4) $\forall_{x \in \mathbb{R}^n} \exists_{x' \in \mathbb{R}^n} \quad x + x' = 0_{\mathbb{R}^n} = x' + x$;

(5) $\forall_{x,y \in \mathbb{R}^n} \forall_{\alpha \in \mathbb{R}} \quad \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$;

(6) $\forall_{x \in \mathbb{R}^n} \forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}} \quad (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$;

(7) $\forall_{x \in \mathbb{R}^n} \forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}} \quad (\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$;

(8) $\forall_{x \in \mathbb{R}^n} \quad 1 \cdot x = x$.

3.2. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$ e S um subespaço do espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$. Mostre que

(a) Se $v \in S$, então $-v \in S$.

(b) Se $u, v \in S$, então $u - v \in S$.

(c) Se $u + v \in S$ e $u \in S$, então $v \in S$.

(d) Se existe $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $\alpha v \in S$, então $v \in S$.

3.3. Determine quais dos seguintes conjuntos são subespaços do espaço vetorial real indicado.

(a) $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 0 \text{ e } x_2 + 2x_3 = 0\}$ em $\mathbb{R}^3$.

(b) $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = -5x_2 \text{ e } x_2 - 3x_3 = 0\}$ em $\mathbb{R}^4$.

(c) $W_3 = \{(0, a, b, -1) \in \mathbb{R}^4 : a, b \in \mathbb{R}\}$ em $\mathbb{R}^4$.

(d) $W_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_3 = 2 \text{ e } x_2 - 3x_3 = 0\}$ em $\mathbb{R}^4$.

(e) $W_5 = \{a(1, 2) \in \mathbb{R}^2 : a \in \mathbb{R}\}$ em $\mathbb{R}^2$.

(f) $W_6 = \{a(1, 2) + b(-3, 1) \in \mathbb{R}^2 : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}_0^+\}$ em $\mathbb{R}^2$.

3.4. Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$ e, para cada $t \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$V_t = \{(1 - t, (3 - t)x, t^2 - 1) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}.$$

Determine, caso existam, os valores de t para os quais V_t é subespaço vetorial do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$.

3.5. Considere os seguintes subespaços vetoriais do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$:

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\},$$
$$V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0, y - z = 0\},$$
$$V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y = 0, z = 0\}.$$

(a) Mostre que

i. $V_2 = \{(b, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : b \in \mathbb{R}\}$.

ii. $V_3 = \{(2a, a, 0) \in \mathbb{R}^3 : a \in \mathbb{R}\}$.

(b) Diga, justificando, se:

i. $(7, 1, -2) \in V_3 + V_2$;

ii. $V_1 \subseteq V_2$, $V_2 \subseteq V_1$, $V_2 \subseteq V_3$, $V_3 \subseteq V_2$;

iii. $V_1 \cap V_3$, $V_2 + V_3$, $V_1 \cup V_2$, $V_2 \cup V_3$ são subespaços vetoriais do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$;

iv. $\mathbb{R}^3$ é soma direta de V_1 e V_3;

v. $\mathbb{R}^3$ é soma direta de V_2 e V_3.

3.6. Verifique se

(a) $(1, -1)$ é combinação linear de $(3, 6), (1, 2), (2, 4)$, no espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$.

(b) $(1, -4, 5)$ é combinação linear de $(1, -1, 1), (2, 1, -2)$, no espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$.

(c) $(3, 0, 2)$ é combinação linear de $(-1, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1)$, no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

(d) $(0, 2, 1)$ é combinação linear de $(-1, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1)$, no espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$.

(e) $(1, 2, 0, 3)$ é combinação linear de $(1, -2, 0, 1), (0, 1, -1, 1), (0, 0, 2, 1)$, no espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$.

(f) $(1, 0, -4, 2)$ é combinação linear de $(1, -2, 0, 1), (0, 1, -1, 1), (0, 0, 2, 1)$, no espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$.

3.7. Em cada um dos espaços vetoriais V a seguir indicados, determine o subespaço vetorial de V gerado por S.

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(1, 1, 1)\}$.

(b) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(0, 0, 0)\}$.

(c) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

(d) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(1, 2, 3), (-2, -4, -6), (4, 8, 12)\}$.

(e) $V = \mathbb{R}^4$, $S = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\}$.

(f) $V = \mathbb{R}^4$, $S = \{(2, 1, 0, 0), (2, 0, 2, 0), (3, 1, 1, 0)\}$.

3.8. Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$. Mostre que

(a) $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$.

(b) $\{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$.

(c) $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ não é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$.

3.9. Determine dois conjuntos distintos de geradores de cada um dos seguintes subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^4$:

(a) $\mathbb{R}^4$.

(b) $\{(a, c - a, c, 2c) \in \mathbb{R}^4 : a, c \in \mathbb{R}\}$.

(c) $\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a + c = 0, 2b + d + c = 0\}$.

3.10. Seja $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y\}$.

(a) Indique vetores $u, v \in \mathbb{R}^3$ tais que $u \in F$ e $v \notin F$.
(b) Mostre que F é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ indicando um conjunto gerador de F.
(c) Diga, justificando, se $F =< (6, 3, 0), (-2, -1, 5), (0, 0, 3) >$.

3.11. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e u_1, u_2, u_3 vetores do espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$. Justifique que:

(a) $< u_1, u_2, u_3 >=< u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3 >$.
(b) $< u_1, u_2, u_3 >=< -u_3, -u_1 + u_2, 2u_2 + u_3 >$.

3.12. No espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$, sejam $v_1 = (1, 0, 0, -1)$, $v_2 = (1, -2, 0, 1)$, $v_3 = (0, 1, 0, -1)$ e $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Indique, caso exista:

(a) um conjunto gerador de W que tenha exatamente 4 vetores.
(b) um conjunto $\{w_1, w_2, w_3\}$ que gere W e tal que $w_j \neq v_1$, $\forall\ j \in \{1, 2, 3\}$.
(c) um conjunto gerador de W que tenha exatamente 2 vetores.

3.13. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$. Mostre que;

(a) Se $X \subseteq Y$, então $\langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$.
(b) $\langle X \cup Y \rangle = \langle X \rangle + \langle Y \rangle$.

3.14. Diga se são linearmente independentes as sequências de vetores a seguir indicadas:

(a) $((1, 0), (1, 1))$ em $\mathbb{R}^2$.
(b) $((1, 0), (1, 1), (0, -1))$ em $\mathbb{R}^2$.
(c) $((2, 0, 1), (0, 0, -1), (-1, 1, 2))$ no espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$.
(d) $((1, 2, 3), (-1, 1, 1), (2, 0, 1), (0, 2, 1))$ no espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$.
(e) $((0, 1, 1, 0), (-1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, -1))$ no espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$.
(f) $((1, 1, 1, 0), (2, 0, 2, 3), (-1, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 2))$ no espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$.

3.15. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e e $v_1, ..., v_n, v_{n+1}$ elementos do espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$ tais que a sequência $(v_1, ..., v_n)$ é linearmente independente. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes.

(a) $(v_1, ..., v_n)$ é uma base de $\mathbb{R}^n$.
(b) A sequência de vetores $(v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_n)$ é linearmente independente.
(c) A sequência de vetores $(v_1, ..., v_n, v_{n+1})$ é linearmente dependente.
(d) Para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, a sequência de vetores $(v_1, ..., \alpha v_i, ..., v_n)$ é linearmente independente.
(e) Para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, a sequência de vetores $(v_1, ..., v_{i-1}, v_i + \alpha v_j, v_{i+1}, ..., v_n)$, onde $j \neq i$, é linearmente independente.

3.16. Considere, no espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$, os subespaços

$$U = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 : a_1 - a_4 = 0, a_4 - a_3 = 0\}$$
$$W_1 = \{(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4 : b_2 + 2b_3 = 0, b_1 + 2b_3 - b_4 = 0\}$$
$$W_2 =< (1, 1, 1, 0), (-1, 1, 0, 1), (1, 3, 2, 1), (-3, 1, -1, 2) >.$$

(a) Diga, justificando, se $((1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1))$ é uma base de U.
(b) Determine uma base de:
i. W_1. ii. W_2.

3.17. Determine uma base de $W \cap U$ e uma base de $W + U$ onde

(a) $W =< (0,0,-1),(1,0,2) >$ e $U =< (0,1,1),(-1,3,2) >$ são subespaços do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$.

(b) $W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1+2x_4 = 0\}$ e $U = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1+x_2+x_4 = 0\}$ são subespaços do espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$.

(c) $W = \{(y, 2y-x, x+y, z) \in \mathbb{R}^4 \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$ e $U = \{(\alpha, 3\alpha, 0, -\alpha) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ são subespaços do espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$.

3.18. Indique, se existir, uma base do espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$ da qual façam parte os vetores:

(a) $(1,0,-1,2),(1,0,1,0)$.

(b) $(0,1,1,-1),(0,1,0,2),(0,2,1,1)$.

(c) $(1,-1,-1,2),(0,1,2,0),(1,0,1,-2)$.

3.19. Determine um suplementar de:

(a) $W =< (1,0,-1,2),(1,0,1,0) >$ relativamente a $\mathbb{R}^4$.

(b) $U =< (1,-1,-1,2),(0,1,2,0),(1,0,1,-2) >$ relativamente a $\mathbb{R}^4$.

(c) $F = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : 2a+b = 0 \text{ e } c = 0\}$ relativamente a $\mathbb{R}^4$.

3.20. Sejam $n \in \mathbb{N}$, W, U subespaços do espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$, (w_1,w_2,w_3,w_4) uma base de W e (u_1,u_2,u_3) uma base de U. Sendo $z_1 = 2w_1+w_2-w_3 = u_1+2u_2$ e $z_2 = -w_2+w_4 = u_2-u_3$, admita que (z_1,z_2) é base de $W \cap U$.
Indique, justificando,

(a) uma base de W que inclua z_1, z_2.

(b) uma base de U que inclua z_1, z_2.

(c) uma base de $W + U$.

3.21. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e W, U subespaços vetoriais do espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes:

(a) Se $\mathrm{dimW} \leq \mathrm{dimU}$, então $W \subseteq U$.

(b) Se $\mathrm{dimW} = \mathrm{dimU}$, então $\mathrm{dim(W+U)} = \mathrm{dimW} + \mathrm{dimU}$.

(c) Se $\mathrm{dimU} + \mathrm{dimW} = \mathrm{dim}\mathbb{R}^\mathrm{n}$, então $\mathbb{R}^n$ é soma direta de U e W.

(d) Se $\mathrm{dim(U+W)} = \mathrm{dim}\mathbb{R}^\mathrm{n}$, então $\mathbb{R}^n$ é soma direta de U e W.

(e) Se $\mathrm{dim(U+W)} = \mathrm{dimU} + \mathrm{dimW}$, então V é soma direta de U e W.

(f) Se V é soma direta de U e W, então $\mathrm{dim(U+W)} = \mathrm{dimU} + \mathrm{dimW}$.

3.22. Usando o conceito de característica de uma matriz, determine a dimensão dos subespaços vetoriais:

(a) $\langle (3,-1,4),(2,1,3),(1,0,2) \rangle$ de $\mathbb{R}^3$;

(b) $\langle (0,1,1,2),(-2,1,0,1),(3,1,5,2),(1,0,3,-1) \rangle$ de $\mathbb{R}^4$.

(c) $\langle (1,2,1,2),(-2,-4,0,2),(3,2,1,0),(6,0,3,-3) \rangle$ de $\mathbb{R}^4$.

3.23. Considere os seguintes vetores do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (\alpha, 6, -1),\ v_2 = (1, \alpha, -1),\ v_3 = (2, \alpha, -3).$$

(a) Determine os valores do parâmetro real α para os quais (v_1,v_2,v_3) é uma base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Para um dos valores de α determinados na alínea anterior, calcule as coordenadas do vetor $v = (-1,1,2)$ em relação à base (v_1,v_2,v_3).