ÁLGEBRA LINEAR CC

Exercícios - Valores próprios e vetores próprios

Lic. Ciências da Computação **2025/2026**

7.1. Seja f o endomorfismo do espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$ definido por $f(a,b) = (3a+4b, -2a-3b)$, para todo $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Mostre que $(-2,1)$ e $(1,-1)$ são vetores próprios de f.

(b) Diga, justificando, se f é automorfismo de $\mathbb{R}^2$.

7.2. Seja h o endomorfismo do espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$ definido por $h(a,b) = (-b, 2a)$, para todo $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que h não admite valores próprios.

7.3. Seja B' a base de $\mathbb{R}^3$ definida por $\mathcal{B}' = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$M(f;\mathcal{B}',\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Diga, justificando, se $(1,2,3)$ é vetor próprio de f.

(b) Determine os valores próprios de f.

(c) Determine a dimensão do subespaço próprio de f associado ao valor próprio 1.

7.4. Sejam (v_1,v_2,v_3,v_4) uma base de $\mathbb{R}^4$ e $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^4)$ tal que

$$M(h;(v_i),(v_i)) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Indique os valores próprios de h e bases para os respectivos subespaços próprios.

(b) Indique $\dim \mathrm{Im} h$. Justifique.

(c) Determine $\{v \in \mathbb{R}^4 : h(v) = -v\}$.

(d) Sendo $\mathcal{B}$ a base de $\mathbb{R}^4$ definida por $\mathcal{B} = (v_1+v_2, v_1+v_3, v_1+v_4, v_1)$, indique o determinante de $M(h;\mathcal{B},\mathcal{B})$.

7.5. Seja $\mathcal{B} = (v_1,v_2,v_3)$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Para $a,b \in \mathbb{R}$, seja $f_{a,b} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ tal que

$$M(f_{a,b};\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & a+1 & -b \\ 1 & 1 & 1 \\ a & a & a+b+1 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que, para quaisquer $a,b \in \mathbb{R}$, $v_1 - v_3$ é vetor próprio de $f_{a,b}$.

(b) Determine os valores de a e de b para os quais 1 é valor próprio de $f_{a,b}$.

(c) Determine os valores de a e de b para os quais 0 é valor próprio de $f_{a,b}$ com multiplicidade geométrica 2.

7.6. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine os valores próprios e os vetores próprios de A. Indique as multiplicidades geométrica e algébrica de cada um dos valores próprios.

7.7. Considere as seguintes matrizes, apenas com o valor próprio α,

$$A_1 = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Mostre que em A_i se tem m.g.$(\alpha) = i$, $i = 1, 2, 3$.

7.8. Sabendo que A é uma matriz quadrada de ordem 3 que admite como valores próprios 1, -1 e 2, indique, justificando:

(a) Os valores próprios de A^2.
(b) Os valores próprios de $-A$.
(c) Os valores próprios de A^T.
(d) Os valores próprios de $2A^{-1}$.
(e) Os valores próprios de $(2A)^{-1}$.

7.9. Seja $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ uma base do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$. Para cada $t \in \mathbb{R}$, considere o endomorfismo f_t de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$f_t(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3) = (\alpha_1 - \alpha_3)u_1 + (2\alpha_2 + t\alpha_3)u_2 + (t\alpha_2 + 2\alpha_3)u_3,$$

para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

(a) Determine $M(f_t; \mathcal{B}, \mathcal{B})$, para cada $t \in \mathbb{R}$.
(b) Determine os valores de t para os quais f_t não admite 0 como valor próprio. Justifique.
(c) Determine os subespaços próprios de f_0.
(d) Indique uma base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ formada por vetores próprios de f_0 e a matriz de f_0 em relação a $\mathcal{B}'$. Justifique.

7.10. Considere, no espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, a base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ e o endomorfismo φ tal que

$$M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine os valores próprios de φ.
(b) Determine o subespaço próprio de φ associado ao valor próprio -2.
(c) Diga, justificando, se:
  i. φ é diagonalizável.
  ii. φ é automorfismo de $\mathbb{R}^3$.

7.11. Sejam (v_1, v_2, v_3) uma base de $\mathbb{R}^3$ e $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ definido por

$$f(av_1 + bv_2 + cv_3) = (a - 3b + 3c)v_1 + (3a - 5b + 3c)v_2 + (6a - 6b + 4c)v_3,$$

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) Determine os valores próprios de f e a respectiva multiplicidade geométrica.
(b) Diga, justificando, se f é diagonalizável.

7.12. Dê exemplo de um endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que admita -1 como valor próprio com multiplicidade algébrica 2 e seja diagonalizável. Justifique.

7.13. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{5}{2} \\ -2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Determine uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}AP$ seja uma matriz diagonal.

7.14. Considere a matriz real

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Justifique que A não é diagonalizável.

7.15. Considere a matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

(a) Determine os valores próprios de A.

(b) Justifique que A é diagonalizável. Determine uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $A = PDP^{-1}$.

(c) Calcule A^{10}.

7.16. Considere as matrizes simétricas a seguir indicadas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Para cada uma das matrizes, encontre uma matriz ortogonal que as diagonalize.

(b) Diga se matriz é definida positiva e se é semidefinida positiva.

7.17. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(a) Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, todo o vetor próprio de f é também um vetor próprio de $f \circ f$.

(b) Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, se $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ são vetores próprios de f associados a valores próprios distintos, então $v_1 + v_2$ é vetor próprio de f.

(c) Se $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ admite 0 como valor próprio com multiplicidade algébrica 2, então $\dim \operatorname{Nuc} g = 2$.

(d) Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, se os valores próprios de A são todos distintos, então A é diagonalizável.

(e) Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, se A admite n valores próprios distintos, então A é diagonalizável.

(f) Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, se A é invertível, então AB e BA têm o mesmo polinómio característico.