Exercícios para a unidade curricular

Álgebra Linear CC

Licenciatura em Ciências da Computação

Carla Mendes
Departamento de Matemática
Universidade do Minho
2025/2026

Índice

1 Matrizes

Exercícios e resoluções

Exercício 1.1

Para as matrizes seguintes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix},$$

indique:

(a) O tipo de cada matriz.

(b) Quais das matrizes são quadradas.

(c) Quais das matrizes são triangulares inferiores.

(d) Quais das matrizes são diagonais.

Resolução:

(a) Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Uma matriz M diz-se uma matriz do tipo $m \times n$ se tem m linhas e n colunas. Assim,

- a matriz A é do tipo 3×4.
- a matriz B é do tipo 3×3.
- a matriz C é do tipo 3×1.
- a matriz D é do tipo 1×4.
- a matriz E é do tipo 1×1.
- a matriz F é do tipo 4×4.
- a matriz G é do tipo 3×2.
- a matriz H é do tipo 3×3.

(b) Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ diz-se uma matriz quadrada se $m = n$. Logo, das matrizes indicadas, são quadradas as matrizes: B (é uma matriz do tipo 3×3); E (é uma matriz do tipo 1×1); F (é uma matriz do tipo 4×4); H (é uma matriz do tipo 3×3).

(c) Seja $n \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ diz-se triangular inferior se, para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se $a_{ij} = 0$ sempre que $i < j$. Logo, são matrizes triangulares inferiores as matrizes E, F e H.

(d) Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ diz-se uma matriz diagonal se, para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se $a_{ij} = 0$ sempre que $i \neq j$. Logo, são matrizes diagonais as matrizes E e F.

Exercício 1.2

Escreva a tabela das seguintes matrizes:

(a) $A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,4 \\ j=1,\ldots,5}}$ onde $a_{ij} = i + j$.

(b) $B = [b_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,4 \\ j=1,\ldots,5}}$ onde $b_{ij} = |i - j|$.

(c) $C = [c_{ij}]$, quadrada de ordem n, tal que $n = 3$ e $c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i + j \text{ é par} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$.

(d) $D = [d_{ij}]$, quadrada de ordem n, tal que $n = 3$ e $d_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{se } i > j \\ 0 & \text{se } i = j \\ 1 & \text{se } i < j \end{cases}$.

Resolução:

(a) A matriz A é uma matriz do tipo 4×5, pois tem 4 linhas e 5 colunas, e o elemento na linha i e coluna j da matriz A é dado por $a_{ij} = i + j$. Assim, a matriz A é a matriz descrita pelo quadro seguinte

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

(b) A matriz B é uma matriz é do tipo 4×5, pois tem 4 linhas e 5 colunas, e o elemento na linha i e coluna j da matriz B é dado por $b_{ij} = |i - j|$. Assim, a matriz B é a matriz descrita pelo quadro seguinte

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) A matriz C é uma matriz do tipo 3×3, pois tem 3 linhas e 3 colunas, e o elemento na linha i e coluna j da matriz C é 1 se $i + j$ é par e é 0 se $i + j$ é ímpar. Assim, a matriz C é a matriz descrita pelo quadro seguinte

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(d) A matriz D é uma matriz do tipo 3×3, pois tem 3 linhas e 3 colunas, e o elemento na linha i e coluna j da matriz D é: 1 se o número da linha i é inferior ao número da coluna j; 0 se o número da linha é igual ao número da coluna; -1 se o número da linha é superior ao número da coluna. Assim, a matriz D é a matriz descrita pelo quadro seguinte

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercício 1.3

Considere as matrizes de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine:

(a) $A + B + C$. (b) $2A + B + 3C$.

(c) $A - B$. (c) $2A + 3(B - C)$.

Resolução:

(a) Por definição de adição de matrizes e considerando a associatividade desta operação, temos

$$\begin{aligned} A + B + C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 7 & 4 & 5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Por definição de adição de matrizes, multiplicação de um escalar por uma matriz e considerando a associatividade da adição de matrizes, temos

$$\begin{aligned} 2A + B + 3C &= 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 6 & 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 3 & 9 \\ 12 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ 6 & 6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 3 & 9 \\ 12 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 18 & 6 & 11 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Por definição de adição de matrizes e multiplicação de um escalar por uma matriz, temos

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -4 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(d) Por definição de adição de matrizes, multiplicação de um escalar por uma matriz e considerando a associatividade da adição de matrizes, temos

$$\begin{aligned}
2A+3(B-C) &= 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} + 3\left(\begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 6 & 4 & 8 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 6 & 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 21 & -12 & -6 \\ -12 & 6 & -3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 23 & -12 & -10 \\ -6 & 10 & 5 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Exercício 1.4

Seja A uma matriz do tipo $m \times (m+5)$ e B uma matriz do tipo $n \times (11-n)$ tais que AB e BA estão definidas. Determine os valores possíveis para m e n.

Resolução:

A expressão AB define uma matriz se e só se o número de colunas da matriz A for igual ao número de linhas da matriz B, ou seja, se e só se $m+5=n$. Por outro lado, a expressão BA define uma matriz se e só se o número de colunas de B for igual ao número de linhas da matriz A, isto é, se e só se $11-n=m$. No sentido de determinarmos os valores de m e n que satisfazem simultaneamente as duas condições, resolvemos o sistema

$$\begin{cases} m+5=n \\ 11-n=m \end{cases}$$

e obtemos $m=3$ e $n=8$.

Exercício 1.5

Se possível, calcule AB e BA sendo:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 5 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$.

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Resolução:

(a) A matriz A é do tipo 2×4, a matriz B é do tipo 4×3. Como o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas de B, o produto AB está definido. A matriz AB é uma matriz do tipo 2×3 e temos

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 0 + 2(-1) + 3(-1) + 0\cdot 0 & 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 0 + 0\cdot 3 & 1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 3\cdot 0 + 0\cdot 0 \\ 1\cdot 0 + (-1)(-1) + 0\cdot(-1) + 2\cdot 0 & 1\cdot\ 1 + (-1)\cdot 2 + 0\cdot 0 + 2\cdot 3 & 1\cdot 0 + (-1)\cdot 1 + 0\cdot 0 + 2\cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

O número de colunas de B não é igual ao número de linhas de A, logo o produto BA não está definido.

(b) As matrizes A e B são ambas do tipo 3×3. O número de colunas de A é igual ao número de linhas de B e, portanto, o produto AB está definido. Pelo mesmo motivo, o produto BA também está definido. Tem-se

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 5 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 5 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 7 & 2 \\ -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} \\ -5 & \frac{5}{2} & 5 \end{bmatrix}.$$

(c) A matriz A é do tipo 4×1 e a matriz B é do tipo 1×4. O número de colunas de A é igual ao número de linhas de B e, portanto, o produto AB está definido. A matriz AB é uma matriz do tipo 4×4 e tem-se

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O número de colunas de B é igual ao número de linhas de A, pelo que o produto BA está definido. A matriz BA é do tipo 1×1 e tem-se

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = [3].$$

Exercício 1.6

Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Diga quais das seguintes expressões identificam matrizes, e em tais casos calcule-as.

(a) $A + 2B$. (b) AB. (c) $AC + D$.
(d) $(A + B)C$. (e) ACD. (f) $2ACA + A$.

Resolução:

(a) Tem-se $A, B \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$. Então, por definição de produto de um escalar por uma matriz, $2A \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$. As matrizes A e $2B$ são do mesmo tipo, logo a soma de A e $2B$ está definida e temos

$$A + 2B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 7 & -4 & 3 \\ -2 & 7 & 3 \\ 3 & 6 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) As matrizes A e B são do tipo 4×3. O número de colunas de A não é igual ao número de linhas de B, pelo que a expressão AB não define uma matriz.

(c) Tem-se $A \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ e $D \in \mathcal{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$. O número de colunas de A é igual ao número de linhas de C e, portanto, AC define uma matriz e é uma matriz do tipo 4×4. Uma vez que as matrizes AC e D não são do mesmo tipo, então a expressão $AC + D$ não define uma matriz.

(d) Tem-se $A, B \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$ e $C \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$. As matrizes A e B são do mesmo tipo, pelo que a expressão $A + B$ define uma matriz. Por definição de adição de matrizes, $A + B \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$. Considerando que o número de colunas de $A + B$ é igual ao número de linhas de C, a expressão $(A + B)C$ define uma matriz do tipo 4×4. Temos

$$\begin{aligned}
(A+B)C &= \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 12 & 10 & 13 & 18 \\ -2 & 8 & 7 & 18 \\ 11 & -5 & -1 & -14 \\ 9 & 9 & -9 & 6 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

(e) Tem-se $A \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ e $D \in \mathcal{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$. O número de colunas de A é igual ao número de linhas de C e, portanto, AC define uma matriz do tipo 4×4. Uma vez que o número de colunas de AC é igual ao número de linhas de D, então a expressão ACD define uma matriz do tipo 4×2.
Temos

$$\begin{aligned}
ACD &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 8 & 2 & 12 & 6 \\ -6 & -2 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & -2 & -6 \\ 4 & 8 & 1 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & -24 \\ 2 & -9 \\ -15 & -3 \\ 24 & 33 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(f) Tem-se $A \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$ e $C \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$. O número de colunas de A é igual ao número de linhas de C e, portanto, AC define uma matriz do tipo 4×4. Uma vez que o número de colunas de AC é igual ao número de linhas A, então ACA define uma matriz do tipo 4×3. Logo, $2ACA$ é também uma matriz do tipo 4×3. Considerando que $2ACA$ e A são matrizes do mesmo tipo, então $2ACA + A$ define uma matriz. Tem-se

$$
\begin{aligned}
2ACA + A &= 2\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= 2\begin{bmatrix} 8 & 2 & 12 & 6 \\ -4 & -4 & 9 & 0 \\ 7 & -1 & -2 & -6 \\ 4 & 8 & 1 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= 2\begin{bmatrix} 32 & 40 & 52 \\ -4 & 31 & -11 \\ -3 & 3 & 19 \\ 36 & -9 & 37 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 64 & 80 & 104 \\ -8 & 62 & -22 \\ -6 & 6 & 38 \\ 72 & -18 & 74 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 66 & 81 & 108 \\ -9 & 60 & -21 \\ -6 & 9 & 39 \\ 75 & -18 & 75 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Exercício 1.7

Justifique as afirmações seguintes:

(a) Se $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tem a linha i nula, então, qualquer que seja $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, a matriz AB tem a linha i nula.

(b) Se $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ tem a coluna j nula, então, qualquer que seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, a matriz AB tem a coluna j nula.

(c) Se $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tem as linhas i e s iguais, com $i, s \in \{1, \ldots, m\}$, então, qualquer que seja $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, a matriz AB tem as linhas i e s iguais.

(d) Se $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ tem as colunas j e s iguais, com $j, s \in \{1, \ldots, p\}$, então, qualquer que seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, a matriz AB tem as colunas j e s iguais.

Resolução:

(a) Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ e $i \in \{1, \ldots, m\}$. Admitindo que a linha i de A é nula, tem-se $a_{ik} = 0$, para qualquer $k \in \{1, \ldots, n\}$. Assim, considerando que o elemento (i, j) da matriz AB é $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, da hipótese segue que $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = 0$, para todo $j \in \{1, \ldots, p\}$. Portanto, todos os elementos da linha i da matriz AB são nulos.

(b) Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ e $j \in \{1, \ldots, p\}$. Admitindo que a coluna j de B é nula, tem-se $b_{kj} = 0$, para qualquer $k \in \{1, \ldots, n\}$. Assim, considerando que o elemento (i, j) da matriz AB é $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, da hipótese segue que $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = 0$, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Portanto, todos os elementos da coluna j da matriz AB são nulos.

(c) Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ e $i, s \in \{1, \ldots, m\}$. Admitindo que as linhas i e s de A são iguais, tem-se $a_{ik} = a_{sk}$, para qualquer $k \in \{1, \ldots, n\}$. Assim, considerando que, para qualquer $j \in \{1, \ldots, p\}$, os elementos (i, j) e (s, j) da matriz AB são dados, respetivamente, por $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ e $\sum_{k=1}^{n} a_{sk}b_{kj}$, é imediato que as linhas i e s da matriz AB são iguais, pois, para todo $j \in \{1, \ldots, p\}$, $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{sk}b_{kj}$.

(d) Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ e $j, s \in \{1, \ldots, p\}$. Admitindo que as colunas j e s de B são iguais, tem-se $b_{kj} = b_{ks}$, para qualquer $k \in \{1, \ldots, n\}$. Assim, considerando que, para qualquer $i \in \{1, \ldots, m\}$, os elementos (i, j) e (i, s) da matriz AB são dados, respetivamente, por $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ e $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ks}$, é imediato que as colunas j e s da matriz AB são iguais, pois da hipótese segue que $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ks}$, para qualquer $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Exercício 1.8

Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ duas matrizes do tipo $n \times n$.

(a) Escreva o elemento da matriz $A^2 + B$ situado na linha i e na coluna j.

(b) Escreva o elemento da matriz $A - BA + 2I_n$ situado na linha i e na coluna j.

Resolução:

(a) Por definição de adição de matrizes e de multiplicação de matrizes, temos

$$(A^2 + B)_{ij} = (A^2)_{i,j} + B_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj} + b_{ij}.$$

(b) Por definição de multiplicação de matrizes, de multiplicação de um escalar por uma matriz, de adição de matrizes e considerando a associatividade da adição de matrizes, temos

$$\begin{array}{rcl} (A - BA + 2I_n)_{ij} & = & A_{ij} + (-BA)_{ij} + 2(I_n)_{ij} \\ & = & a_{ij} - \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj} + 2\delta_{ij}, \end{array}$$

onde $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

Exercício 1.9

Sejam A, B matrizes 2×2 reais tais que

$$AB - BA = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Mostre que $a + d = 0$.

Resolução:

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

tais que $AB - BA = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Então

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

donde segue que

$$\begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) - (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21}) & (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) - (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22}) \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) - (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21}) & (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$a = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) - (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21}) \text{ e } d = (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22})$$

e, claramente, $a + d = 0$.

Exercício 1.10

Sejam $D \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $D' \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Mostre que se D e D' são matrizes diagonais. Então

(a) DD' é uma matriz diagonal.

(b) Para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$, $(DD')_{ii} = D_{ii}D'_{ii}$.

Resolução:

(a) Sejam $D, D' \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ matrizes diagonais. Então, para quaisquer $p,q \in \{1\ldots,n\}$ tais que $p \neq q$, tem-se $D_{pq} = 0$ e $D'_{pq} = 0$. Daqui resulta que, para quaisquer $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ tais que $i \neq j$, $(DD')_{ij} = 0$, pois

$$(DD')_{ij} = \sum_{k=1}^{n} D_{ik}D'_{kj}$$

e: se $k = i$, tem-se $k \neq j$, pelo que $D'_{kj} = 0$; se $k \neq i$, temos $D_{ik} = 0$. Assim, $D_{ij} = 0$, sempre que $i \neq j$ e, portanto, D é uma matriz diagonal.

(b) Sejam $D, D' \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ matrizes diagonais. Então, para quaisquer $p,q \in \{1\ldots,n\}$ tais que $p \neq q$, tem-se $D_{pq} = 0$ e $D'_{pq} = 0$. Logo, como

$$(DD')_{ii} = \sum_{k=1}^{n} D_{ik}D'_{ki},$$

para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$, e, para todo $k \neq i$, $D_{ik} = 0$ e $D'_{ki} = 0$, resulta que $(DD')_{ii} = D_{ii}D'_{ii}$.

Exercício 1.11

Considere as matrizes reais

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine uma matriz real X tal que:

(a) $3(X + \frac{1}{2}A) = 5(X - \frac{3}{4}B)$.

(b) $X + A = 2(X - B)$.

(c) $CX = I_2$.

Resolução:

(a) Considerando propriedades da adição de matrizes e da multiplicação de um escalar por uma matriz, temos

$$\begin{aligned}
3(X + \tfrac{1}{2}A) = 5(X - \tfrac{3}{4}B) \quad &\Leftrightarrow \quad 3X + \tfrac{3}{2}A = 5X - \tfrac{15}{4}B \\
&\Leftrightarrow \quad 3X - 5X = -\tfrac{15}{4}B - \tfrac{3}{2}A \\
&\Leftrightarrow \quad -2X = -\tfrac{15}{4}B - \tfrac{3}{2}A \\
&\Leftrightarrow \quad X = \tfrac{15}{8}B + \tfrac{3}{4}A \\
&\Leftrightarrow \quad X = \begin{bmatrix} \frac{21}{8} & \frac{15}{8} & \frac{15}{8} \\ \frac{15}{8} & \frac{21}{8} & \frac{15}{8} \\ \frac{15}{8} & \frac{15}{8} & \frac{21}{8} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

(b) Considerando as propriedades da adição de matrizes e da multiplicação de um escalar por uma matriz, temos

$$\begin{array}{rcl} X+A=2(X-B) & \Leftrightarrow & X+A=2X-2B \quad \Leftrightarrow \quad X-2X=-A-2B \\ & \Leftrightarrow & -X=-A-2B \quad \Leftrightarrow \quad X=A+2B \\ & \Leftrightarrow & X=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} . \end{array}$$

(c) Pretende-se determinar uma matriz $X \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que $CX = I_2$. Então, considerando que o número de colunas de C é 3, o produto CX só está definido se $m = 3$. Por outro lado, se o produto CX estiver definido, a matriz CX será do tipo $2 \times n$, pelo que n terá de ser igual a 2, uma vez que $CX = I_2$ e I_2 é uma matriz do tipo 2×2. Assim, a matriz X tem de ser uma matriz real do tipo 3×2, ou seja,

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix},$$

com $x_{ij} \in \mathbb{R}$, para todos $i \in \{1, 2, 3\}$ e $j \in \{1, 2\}$.

Temos

$$\begin{array}{rcl} CX = I_2 & \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} x_{11}+x_{21}-3x_{31} & x_{12}+x_{22}-3x_{32} \\ 2x_{11}+x_{31} & 2x_{12}+x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} x_{11}+x_{21}-3x_{31}=1 \\ x_{12}+x_{22}-3x_{32}=0 \\ 2x_{11}+x_{31}=0 \\ 2x_{12}+x_{32}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{21}=1-7x_{11} \\ x_{22}=3-7x_{12} \\ x_{31}=-2x_{11} \\ x_{32}=1-2x_{12} \end{cases} \end{array}$$

Assim, no sentido de determinar uma matriz X nas condições indicadas, basta atribuir valores a x_{11} e x_{12}. Por exemplo, considerando $x_{11} = 0$ e $x_{12} = 1$, obtemos $x_{21} = 1$, $x_{22} = -4$, $x_{31} = 0$ e $x_{32} = -1$, pelo que

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

é uma matriz que satisfaz a igualdade $CX = I_2$.

Exercício 1.12

Dê exemplos de matrizes A e B tais que $A \neq B$ e:

(a) $A^2 = -I_2$.

(b) $A^2 = 0_{2\times 2}$ e $A \neq 0$.

(c) $AB = 0_{2\times 2}$, com $A \neq 0$ e $B \neq 0$.

(d) $AB = 0_{2\times 2}$, com A e B sem elementos nulos.

(e) A, C e D tais que $AC = AD$ e $C \neq D$.

(f) A e B tais que $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

(g) A e B tais que $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$.

[Sugestão: procurar as condições gerais a satisfazer e depois construir os exemplos.]

Resolução:

(a) O produto AA só está definido se A for uma matriz quadrada. Uma vez que $A^2 = -I_2$, a matriz A tem de ser do tipo 2×2. Assim, pretendemos determinar uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

tal que $A^2 = -I_2$.

Temos

$$A^2 = -I_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+bc = -1 \\ ab+bd = 0 \\ ca+dc = 0 \\ cb+d^2 = -1 \end{cases}$$

No sentido de determinar uma matriz A tal que $A^2 = -I_2$, basta atribuir valores a a,b, c e d que satisfaçam as condições anteriores. Por exemplo, $a = 0$, $b = 1$, $c = -1$ e $d = 0$ satisfazem o sistema anterior. Neste caso temos a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e verifica-se que $A^2 = -I_2$.

(b) O produto AA só está definido se A for uma matriz quadrada. Uma vez que $A^2 = 0_{2\times 2}$, a matriz A tem de ser do tipo 2×2. Assim, pretendemos determinar uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

tal que $A^2 = 0_{2\times 2}$. Temos

$$A^2 = 0_{2\times 2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+bc = 0 \\ ab+bd = 0 \\ ca+dc = 0 \\ cb+d^2 = 0 \end{cases}$$

No sentido de determinar uma matriz A tal que $A^2 = 0_{2\times 2}$, basta atribuir valores a a,b, c e d que satisfaçam as condições anteriores. Por exemplo, $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$ e $d = -1$ satisfazem o sistema anterior. Neste caso temos a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ e verifica-se que $A^2 = 0_{2\times 2}$.

(c) Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tem-se $A \neq 0$, $B \neq 0$ e $AB = 0_{2\times 2}$.

Observação: Esta questão poderia ser resolvida por um processo idêntico ao das alíneas anteriores. Note-se que, neste caso, as matrizes A e B não têm de ser necessariamente quadradas. De forma a termos $AB = 0_{2\times 2}$, a matriz A tem de ser do tipo $2 \times p$, para algum $p \in \mathbb{N}$, e a matriz B tem de ser do tipo $p \times 2$. Assim, para algum $p \in \mathbb{N}$, podemos começar por determinar as condições que resultam se considerarmos matrizes reais

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ \vdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} \end{bmatrix}$$

tais que $AB = 0_{2\times 2}$.

Por exemplo, as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

são tais que $A \neq 0$, $B \neq 0$ e $AB = 0_{2\times 2}$.

(d) Sejam
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$
As matrizes A e B não têm elementos nulos e $AB = 0_{2\times 2}$.

Observação: Esta questão poderia ser resolvida por um processo idêntico ao das alíneas anteriores. Note-se que, neste caso, as matrizes A e B não têm de ser necessariamente quadradas. De forma a termos $AB = 0_{2\times 2}$, a matriz A tem de ser do tipo $2 \times p$, para algum $p \in \mathbb{N}$, e a matriz B tem de ser do tipo $p \times 2$. Assim, para algum $p \in \mathbb{N}$, podemos começar por determinar as condições que resultam se considerarmos matrizes reais
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ \vdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} \end{bmatrix}$$
tais que $AB = 0_{2\times 2}$.

Por exemplo, as matrizes
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
são matrizes sem elementos nulos e $AB = 0_{2\times 2}$.

(e) Sendo A uma matriz nula, é imediato que, para quaisquer matrizes B e C, temos $AC = AD$. Por exemplo, considerando
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix},$$
temos $C \neq D$ e $AC = 0_{2\times 2} = AD$.

No sentido de termos matrizes nas condições indicadas, não é necessário que a matriz A seja nula. Por exemplo, sendo
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}.$$
também temos $C \neq D$ e $AC = 0_{2\times 2} = AD$.

(f) Para que a expressão $(A+B)(A-B)$ defina uma matriz, as matrizes A e B têm de ser matrizes quadradas do mesmo tipo. Além disso, para quaisquer matrizes A e B para as quais a expressão $(A+B)(A-B)$ define uma matriz, temos
$$(A+B)(A-B) = A^2 + AB - BA - B^2.$$
Assim, tem-se
$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 \Leftrightarrow A^2 + AB - BA - B^2 = A^2 - B^2 \Leftrightarrow AB = BA.$$
Por conseguinte, A e B têm de ser matrizes quadradas que satisfaçam a condição $AB = BA$.

Considerando as matrizes
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix},$$
verifica-se que estas matrizes são permutáveis e, portanto,
$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B + B - B^2 = A^2 - B^2.$$

(g) Para que a expressão $(A+B)^2$ defina uma matriz, as matrizes A e B têm de ser matrizes quadradas do mesmo tipo. Além disso, para quaisquer matrizes A e B para as quais a expressão $(A+B)^2$ define uma matriz, temos

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2.$$

Assim, tem-se

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \Leftrightarrow A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2 \Leftrightarrow AB = BA.$$

Logo, A e B têm de ser matrizes quadradas que satisfaçam a igualdade $AB = BA$.

Considerando as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix},$$

verifica-se que estas matrizes são permutáveis e tem-se

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + B + B + B^2 = A^2 + 2B + B^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

Exercício 1.13

Verifique se:

(a) a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ é a matriz $B = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Resolução: Seja $n \in \mathbb{N}$. Dadas matrizes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, diz-se que a matriz B é a inversa de A se $AB = I_n$ e $BA = I_n$.

(a) Uma vez que

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

e

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3,$$

então B é a inversa de A.

(b) Uma vez que

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

e

$$BA = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3,$$

então B é a inversa de A.

Exercício 1.14

Use a definição para calcular a inversa de cada uma das seguintes matrizes:

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. (b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. (d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ y & z & 1 \end{bmatrix}$, com $x, y \in \mathbb{R}$.

Resolução: Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, onde $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Uma matriz $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diz-se a inversa da matriz Y se $XY = I_n$ e $YX = I_n$.

(a) Sendo $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ pretende-se determinar $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tal que $AX = I_2$ e $XA = I_2$.

Tem-se

$$AX = I_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -c & -d \\ -a & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -c = 1 \\ -d = 0 \\ -a = 0 \\ -b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que também se tem

$$XA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

e a inversa de uma matriz (caso exista) é única, conclui-se que $X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ é a inversa de A, ou seja,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Sendo $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, pretende-se determinar $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tal que $BX = I_2$ e $XB = I_2$.

Tem-se

$$BX = I_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ 3a+2c & 3b+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a+3c = 1 \\ 2b+3d = 0 \\ 3a+2c = 0 \\ 3b+2d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{5} \\ b = \frac{3}{5} \\ c = \frac{3}{5} \\ d = -\frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

Uma vez que também se tem

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

e a inversa de uma matriz (caso exista) é única, conclui-se que $X = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$ é a inversa de B, ou seja,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

(c) Sendo $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, pretende-se determinar $X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ tal que $CX = I_3$ e $XC = I_3$.

Tem-se

$$\begin{aligned}
CX = I_3 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ a+d & b+e & f+c \\ a+d+g & b+e+h & c+f+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ a+d = 0 \\ b+e = 1 \\ f+c = 0 \\ a+d+g = 0 \\ b+e+h = 0 \\ c+f+i = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = -1 \\ e = 1 \\ f = 0 \\ g = 0 \\ h = -1 \\ i = 1 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Uma vez que também se tem

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

e a inversa de uma matriz (caso exista) é única, conclui-se que

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(d) Sendo $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ y & z & 1 \end{bmatrix}$, pretende-se determinar $X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ tal que $DX = I_3$ e $XD = I_3$.

Tem-se

$$\begin{aligned}
DX = I_3 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ ax+d & bx+e & cx+f \\ ay+dz+g & by+e+h & cy+fz+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ ax+d = 0 \\ bx+e = 1 \\ cx+f = 0 \\ ay+dz+g = 0 \\ by+ez+h = 0 \\ cy+fz+i = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = -x \\ e = 1 \\ f = 0 \\ g = xz-y \\ h = -z \\ i = 1 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 \\ xz-y & -z & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Também se verifica que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 \\ xz-y & -z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ y & z & 1 \end{bmatrix} = I_3,$$

Então, considerando que a inversa de uma matriz (caso exista) é unica, conclui-se que

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 \\ xz-y & -z & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 1.15

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e A, B e C matrizes invertíveis de ordem n.

(a) Qual a inversa de $AB^{-1}C$?

(b) As matrizes A^2 e $A+B$ são invertíveis? Em caso afirmativo, indique a respetiva inversa. Em caso negativo, dê um contraexemplo.

Resolução:

(a) Uma vez que B é invertível, então B^{-1} é invertível e a sua inversa é a matriz B. Como A e B^{-1} são invertíveis e o produto de matrizes invertíveis (caso esteja definido) é ainda uma matriz invertível, AB^{-1} é invertível e a sua inversa é a matriz $(B^{-1})^{-1}A^{-1} = BA^{-1}$. Considerando que AB^{-1} e C são matrizes invertíveis, então $AB^{-1}C$ é invertível e

$$(AB^{-1}C)^{-1} = C^{-1}(AB^{-1})^{-1} = C^{-1}BA^{-1}.$$

(b) Uma vez que A é invertível e o produto de matrizes invertíveis (caso esteja definido) é uma matriz invertível, então A^2 é invertível e $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$.

Se A e B são matrizes invertíveis, não é necessariamente verdade que $A+B$ seja uma matriz invertível. Por exemplo, as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

são invertíveis ($A^{-1} = A$ e $B^{-1} = B$), mas $A+B = 0_{2\times 2}$ não é invertível.

Exercício 1.16

Sejam A uma matriz invertível de ordem m e B, C matrizes do tipo $m \times n$ tais que $AB = AC$. Mostre que $B = C$.

Resolução:

Admitamos que $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é uma matriz invertível. Então existe $A^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que

$$AA^{-1} = I_n = A^{-1}A.$$

Assim,

$$\begin{aligned} AB = AC \quad &\Rightarrow \quad A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \\ &\Rightarrow \quad (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \\ &\Rightarrow \quad I_nB = I_nC \\ &\Rightarrow \quad B = C. \end{aligned}$$

Exercício 1.17

Indique A^T no caso de A ser:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. (b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

Resolução: Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Por definição de transposta de A, tem-se $A^T \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ e, para quaisquer $i \in \{1,\ldots,n\}$, $j \in \{1\ldots,m\}$, $(A^T)_{ij} = a_{ji}$. Assim:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Exercício 1.18

Diga quais das seguintes matrizes são simétricas e quais são antissimétricas:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \\ -7 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Resolução: Uma matriz $X \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ diz-se uma matriz:

- simétrica se $X^T = X$.
- anitissimétrica se $X^T = -X$.

Temos

$$A^T = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } -A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então, como $A = A^T$, a matriz A é simétrica. Uma vez que $A^T \neq -A$ (pois $(A)_{11} = -4 \neq 4 = (-A)^T_{11}$), concluímos que a matriz não é antissimétrica.

Relativamente à matriz B, temos

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -7 \\ -1 & 0 & 2 \\ 7 & -2 & 0 \end{bmatrix} = -B.$$

Considerando que $B^T \neq B$ (pois $(B)_{12} = 1 \neq -1 = B_{21}$), a matriz não é simétrica. A matriz é antissimétrica, uma vez que $B^T = -B$.

A matriz C não é simétrica nem antissimétrica, pois

$$C^T = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

e, portanto, $C^T \neq C$ $((C)_{12} = 1 \neq 2 = C_{21})$ e $C^T \neq -C$ $((C)_{11} = 5 \neq -5 = (-C)^T_{11})$.

Exercício 1.19

Sejam $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $n \in \mathbb{N}$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Mostre que se as matrizes A e B são simétricas, então:

(a) As matrizes $A + B$ e αA são simétricas.

(b) A matriz AB é simétrica se e só se $AB = BA$.

Resolução:

(a) Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma matriz $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diz-se uma matriz simétrica se $X^T = X$.

Se as matrizes A e B são simétricas, tem-se $A^T = A$ e $B^T = B$. Então,

$$(A + B)^T = A^T + B^T = A + B.$$

Logo, a matriz $A + B$ é simétrica.

Sendo A uma matriz simétrica, tem-se $A^T = A$, pelo que

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha A.$$

Portanto, a matriz αA também é simétrica

(b) Admitamos que A e B são simétricas e que AB é simétrica. Então $A^T = A$, $B^T = B$ e $(AB)^T = AB$. Logo, como $(AB)^T = B^T A^T$, tem-se $(B^T A^T) = AB$, donde resulta $BA = AB$.

Reciprocamente, admitamos que A e B são simétricas e $AB = BA$. Daqui resulta que AB é simétrica, pois

$$\begin{array}{rcll} (AB)^T & = & B^T A^T & \\ & = & BA & (A \text{ e } B \text{ são simétricas}) \\ & = & AB & (\text{ por hipótese } AB = BA). \end{array}$$

Exercício 1.20

Dê exemplo de uma matriz quadrada de ordem 3 que seja simultaneamente simétrica e antissimétrica.

Resolução:

Uma matriz $X \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é simétrica se $X^T = X$ e é antissimética se $X^T = -X$. Assim, se X é simétrica e antissimétrica tem-se $X^T = -X^T$, donse resulta $X^T = 0_{n\times n}$ e, consequentemente, $X = 0_{n\times n}$. Por outro lado, para todo $n \in \mathbb{N}$, a matriz $0_{n\times n}$ é uma matriz simétrica e antissimétrica. Assim, uma matriz $X \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é simultaneamente simétrica e antissimétrica se e só se $X = 0_{n\times n}$.

Logo, $0_{3\times 3}$ é exemplo de uma matriz nas condições indicadas.

Exercício 1.21

Diga quais das seguintes matrizes são ortogonais, quais são hermíticas e quais são unitárias:

(a) $A = \begin{bmatrix} 4 & -i & 2i \\ i & 1 & 1-i \\ -2i & 1+i & 0 \end{bmatrix}$. (b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1+i & 5-i \\ 1-i & 7 & i \\ 5+i & -i & -1 \end{bmatrix}$.

(b) $C = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix}$. (d) $D = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$.

Resolução:

Uma matriz $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diz-se:

- ortogonal se $XX^T = I_n = X^T X$.
- hermítica se $X^* = (\overline{X})^T = X$.
- unitária se $XX^* = I_n = X^* X$.

(a) Tem-se
$$A^T = \begin{bmatrix} 4 & -i & 2i \\ i & 1 & 1-i \\ -2i & 1+i & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & i & -2i \\ -i & 1 & 1+i \\ 2i & 1-i & 0 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que
$$AA^T = \begin{bmatrix} 4 & -i & 2i \\ i & 1 & 1-i \\ -2i & 1+i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & i & -2i \\ -i & 1 & 1+i \\ 2i & 1-i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 5i+2 & -9i+1 \\ 5i+2 & -2i & 3+i \\ -9i+1 & 3+i & -4+2i \end{bmatrix}$$

e $AA^T \neq I_3$, concluímos que A não é ortogonal.

Considerando que
$$A^* = \begin{bmatrix} 4 & -i & 2i \\ i & 1 & 1-i \\ -2i & 1+i & 0 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 4 & i & -2i \\ -i & 1 & 1+i \\ 2i & 1-i & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & -i & 2i \\ i & 1 & 1-i \\ -2i & 1+i & 0 \end{bmatrix} = A,$$

concluímos que a matriz é hermítica.

Tem-se
$$AA^* = \begin{bmatrix} 4 & -i & 2i \\ i & 1 & 1-i \\ -2i & 1+i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -i & 2i \\ i & 1 & 1-i \\ -2i & 1+i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -3i-2 & 7i-1 \\ 3i-2 & 4 & -1-i \\ -1-7i & -1+i & 0 \end{bmatrix}.$$

Como $AA^* \neq I_3$, a matriz A não é unitária.

(b) Tem-se
$$B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1+i & 5-i \\ 1-i & 7 & i \\ 5+i & -i & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1-i & 5+i \\ 1+i & 7 & -i \\ 5-i & i & -1 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que
$$BB^T = \begin{bmatrix} 2 & 1+i & 5-i \\ 1-i & 7 & i \\ 5+i & -i & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1-i & 5+i \\ 1+i & 7 & -i \\ 5-i & i & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30-10i & 10+10i & 6+2i \\ 10-4i & 48-2i & 6-12i \\ 4+2i & 6-12i & 24+10i \end{bmatrix}$$

e $BB^T \neq I_3$ concluímos que B não é ortogonal.

Considerando que
$$B^* = \begin{bmatrix} 2 & 1+i & 5-i \\ 1-i & 7 & i \\ 5+i & -i & -1 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 2 & 1-i & 5+i \\ 1+i & 7 & -i \\ 5-i & i & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1+i & 5-i \\ 1-i & 7 & i \\ 5+i & -i & -1 \end{bmatrix},$$

e $B^* = B$, concluímos que a matriz B é hermítica.

Tem-se

$$BB^* = B^*B = \begin{bmatrix} 4 & -i & 2i \\ i & 1 & 1-i \\ -2i & 1+i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -i & 2i \\ i & 1 & 1-i \\ -2i & 1+i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -3i-2 & 7i-1 \\ 3i-2 & 4 & -1-i \\ -1-7i & -1+i & 0 \end{bmatrix}.$$

Como $BB^* \neq I_3$, a matriz B não é unitária.

(c) Tem-se

$$C^T = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{bmatrix}.$$

Considerando que

$$CC^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} + i\frac{2}{3} & -\frac{2i}{3} \\ -\frac{2i}{3} & \frac{1}{3} - i\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

e $CC^T \neq I_2$, conclui-se que a matriz C não é ortogonal.

Uma vez que

$$C^* = (\overline{C})^T = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix}$$

e $C^* = C$, então a matriz é hermítica.

Uma vez que

$$\begin{aligned} CC^* &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} C^*C &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{bmatrix}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \end{aligned},$$

a matriz C é unitária.

(d) Tem-se

$$D^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Considerando que

$$DD^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

e

$$D^TD = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2,$$

conclui-se que a matriz D é ortogonal.

Uma vez que

$$D^* = (\overline{D})^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

e $D^* \neq D$, então a matriz não é hermítica.

Tem-se $DD^* = DD^T = I_2$ e $D^*D = D^TD = I_2$. Logo, a matriz D é unitária.

Exercício 1.22

Mostre que o produto de quaisquer duas matrizes ortogonais é também uma matriz ortogonal.

Resolução: Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrizes ortogonais. Então $AA^T = I_n = A^T A$ e $BB^T = I_n = B^T B$. Logo,

$$(AB)(AB)^T = (AB)(B^T A^T) = A(BB^T)A^T = AI_nA^T = AA^T = I_n$$

e

$$(AB)^T(AB) = (B^T A^T)(AB) = B^T(A^T A)B = B^T I_n B = B^T B = I_n.$$

Portanto, AB é uma matriz ortogonal.

Exercício 1.23

Indique quais das seguintes matrizes são matrizes em forma de escada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Resolução:

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ diz-se uma ***matriz em escada*** se satisfaz as seguintes condições:

- se o primeiro elemento não nulo numa linha está na coluna j, então a linha seguinte começa com pelo menos j elementos nulos;
- se houver linhas totalmente constituídas por zeros, elas aparecem depois das outras.

Assim, são matrizes em forma de escada as matrizes A, C, E e F.

A matriz B não é uma matriz em escada, pois o primeiro elemento não nulo da linha 2 está na coluna 2 e a linha 3 não começa com 2 elementos nulos.

A matriz D não é uma matriz em escada, pois a linha 2 é uma linha nula e existem linhas abaixo da linha 2 que não são linhas nulas.

A matriz G não é uma matriz em escada, pois o primeiro elemento não nulo da linha 1 está na coluna 4 e a linha 2 não começa com 4 elementos nulos.

Exercício 1.24

Indique uma matriz em forma de escada equivalente por linhas a cada uma das seguintes matrizes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -10 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Resolução:

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Uma matriz $Y \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ diz-se equivalente por linhas a uma matriz $X \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ se Y pode ser obtida de X por meio de operações elementares.

Considerando a sequência de operações elementares a seguir indicadas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \to l_2 - 2l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3 - l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = A',$$

obtem-se a matriz A', a qual é uma matriz equivalente por linhas à matriz A (A' é obtida de A por meio de operações elementares) e é uma matriz em forma de escada.

Considerando a sequência de operações elementares a seguir indicadas

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -10 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - 3l_1 \\ l_3 \to l_3 + \frac{1}{2}l_1}]{} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -12 \\ 0 & \frac{5}{2} & -8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[l_2 \to \frac{1}{2}l_2]{} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & \frac{5}{2} & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3 + \frac{5}{2}l_2]{} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -23 \end{bmatrix} = B'$$

obtem-se a matriz B', a qual é uma matriz equivalente por linhas à matriz B (B' é obtida de B por meio de operações elementares) e é uma matriz em forma de escada.

Considerando a sequência de operações elementares a seguir indicadas

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - 2l_1 \\ l_3 \to l_3 + l_1}]{} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3 + 3l_2]{} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} = C'$$

obtem-se a matriz C', a qual é uma matriz equivalente por linhas à matriz C (C' é obtida de C por meio de operações elementares) e é uma matriz em forma de escada.

Considerando a sequência de operações elementares a seguir indicadas

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \to l_2 - 2l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3 + \frac{1}{3}l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = D'$$

obtem-se a matriz D', a qual é uma matriz equivalente por linhas à matriz D (D' é obtida de D por meio de operações elementares) e é uma matriz em forma de escada.

Exercício 1.25

Indique a característica de cada uma das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Resolução:

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ e $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Designa-se por ***característica*** da matriz A, e representa-se por $\text{car}(A)$, o número de pivots que surgem ao aplicar a A o método de eliminação de Gauss. Isto é, $\text{car}(A)$ é o número de linhas não nulas de qualquer matriz em forma de escada que seja equivalente por linhas a A.

As matrizes A, B e C são matrizes em forma de escada com 3 linhas não nulas, logo $car(A) = 3$, $car(B) = 3$ e $car(C) = 3$.

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz D, tem-se

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_4]{} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_3 \to l_3 - \frac{1}{3}l_2 \\ l_4 \to l_4 - \frac{2}{3}l_2}]{} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = D'.$$

A matriz D' é uma matriz equivalente por linhas à matriz D (logo $car(D) = car(D')$) e é uma matriz em forma de escada com 2 linhas não nulas. Assim, $car(D) = 2$.

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz E, tem-se

$$E = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_3 \to l_3 + 4l_1 \\ l_4 \to l_4 + 3l_1}]{} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_4]{} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3 - l_2]{} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_4 \to l_4 + l_3]{} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A última matriz obtida, designada por E', é uma matriz equivalente por linhas à matriz E (logo $car(E) = car(E')$) e é uma matriz em forma de escada com 3 linhas não nulas. Assim, $car(E) = 3$.

Aplicando o método de eliminação de Gauss às matrizes F, G e H, conclui-se que: $car(F) = 4$, $car(G) = 2$, $car(H) = 3$.

Exercício 1.26

Determine, caso existam, os valores de $k \in \mathbb{R}$ para os quais a característica da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & k \end{bmatrix}$$

é inferior a 3.

Resolução:

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & k \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - 2l_1 \\ l_3 \to l_3 - l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & k-1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[l_3 \to l_3 + \frac{1}{3}l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & k - \frac{4}{3} \end{bmatrix} = A'.$$

A matriz A' é uma matriz equivalente por linhas à matriz A (logo $car(A) = car(A')$) e é uma matriz em forma de escada. Assim,

$$car(A) < 3 \text{ se e só se } k - \frac{4}{3} = 0 \text{ se e só se } k = \frac{4}{3}.$$

Exercício 1.27

Determine, caso existam, os valores de $a \in \mathbb{R}$ para os quais a característica da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 22 & -9 \\ 3 & -1 & a^2-5 & a-3 \end{bmatrix}$$

é 3.

Resolução:

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 22 & -9 \\ 3 & -1 & a^2-5 & a-3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - 2l_1 \\ l_3 \to l_3 - 3l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 26 & -11 \\ 0 & -7 & a^2+1 & a-6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[l_3 \to l_3 - l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 26 & -11 \\ 0 & 0 & a^2-25 & a+5 \end{bmatrix} = A'.$$

A matriz A' é uma matriz equivalente por linhas à matriz A (logo $car(A) = car(A')$) e é uma matriz em forma de escada. Assim,

$$car(A) = 3 \text{ se e só se } (a^2 - 25 \neq 0 \text{ ou } a + 5 \neq 0) \text{ se e só se } a \neq -5.$$

2 Sistemas de equações lineares

Exercícios e resoluções

Exercício 2.1

Determine o conjunto de soluções dos seguintes sistemas de equações lineares:

(a) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 3x_4 - 7x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 9x_1 - 2x_2 + x_3 = -9 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -9 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 8 \\ 6x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 13 \\ -4x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -10 \end{cases}$

Resolução:

(a) Sejam (S) o sistema indicado e

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & -3 & 1 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & -6 & 3 & -7 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

a matriz ampliada do sistema. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $[A|b]$, tem-se

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & -3 & 1 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & -6 & 3 & -7 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to l_3 - l_1]{l_2 \to l_2 - 2l_1} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & -3 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \to$$

$$\xrightarrow[l_3 \to l_3 + 2l_1]{} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & -3 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right] = [U|c].$$

A matriz $[U|c]$ é equivalente por linhas à matriz $[A|b]$, logo o sistema representado pela matriz $[U|c]$ e a seguir indicado

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & - & 5x_5 & = & 0 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \\ & & & & 4x_3 & & & + & 8x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

é equivalente ao sistema (S). Deste último sistema obtem-se $x_3 = -2x_5$, $x_2 = -x_4 - 3x_5$, $x_1 = 2x_5$. Assim,

$$Sol_{(S)} = \{(2\alpha_5, -\alpha_4 - 3\alpha_5, -2\alpha_5, \alpha_4, \alpha_5) \mid \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R}\}.$$

(b) Sejam (S) o sistema indicado e

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

a matriz ampliada do sistema. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $[A|b]$, tem-se

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to l_3 - l_1]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_3 \to l_3 + 2l_2]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = [U|c].$$

A matriz $[U|c]$ é equivalente por linhas à matriz $[A|b]$, logo o sistema representado pela matriz $[U|c]$ e a seguir indicado

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

é equivalente ao sistema (S). Deste último sistema obtem-se $0 = 1$. Assim, o sistema é impossível e tem-se

$$Sol_{(S)} = \{\}.$$

(c) Sejam (S) o sistema indicado e

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 9 & -2 & 1 & -9 \\ 3 & 1 & -2 & -9 \end{array}\right]$$

a matriz ampliada do sistema. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $[A|b]$, tem-se

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 9 & -2 & 1 & -9 \\ 3 & 1 & -2 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - 3l_1 \\ l_3 \to l_3 - l_1}]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & -3 & -8 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to l_3 - 2l_2]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] = [U|c].$$

A matriz $[U|c]$ é equivalente por linhas à matriz $[A|b]$, logo o sistema representado pela matriz $[U|c]$ e a seguir indicado

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & = & -6 \\ & & & & x_3 & = & 4 \end{array}\right.$$

é equivalente ao sistema inicial. Deste último sistema obtem-se $x_3 = 4$, $x_2 = 2$, $x_1 = -1$. Assim,

$$Sol_{(S)} = \{(-1, 2, 4)\}.$$

(d) Sejam (S) o sistema indicado e

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 7 & 3 & 8 \\ 6 & 4 & 9 & 4 & 13 \\ -4 & -2 & -4 & -2 & -10 \end{array}\right]$$

a matriz ampliada do sistema. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $[A|b]$, tem-se

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 7 & 3 & 8 \\ 6 & 4 & 9 & 4 & 13 \\ -4 & -2 & -4 & -2 & -10 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - 2l_1 \\ l_3 \to l_3 - 3l_1 \\ l_4 \to l_4 + 2l_1}]{} \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_3 \to l_3 - l_2]{} \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [U|c].$$

A matriz $[U|c]$ é equivalente por linhas à matriz $[A|b]$, logo o sistema representado pela matriz $[U|c]$ e a seguir indicado

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$$

é equivalente ao sistema inicial. Deste último sistema obtem-se $x_2 = -2 - 3x_3 - x_4$, $x_1 = \frac{x_3}{2} + \frac{1}{2}$. Assim,

$$Sol_{(S)} = \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha_3}{2}, -2 - 3\alpha_3 - \alpha_4, \alpha_3, \alpha_4 \right) \mid \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercício 2.2

Efectue os seguintes produtos de matrizes

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix};$$

Com base nos resultados obtidos indique um sistema de equações lineares:

(a) com três equações e quatro incógnitas que tenha $(0, 1, 1, 0)$ como solução.

(b) com três equações e duas incógnitas que tenha $(-1, 1)$ como solução.

(c) com três equações e três incógnitas que seja possível e indeterminado.

Resolução:

Temos

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

O sistema cuja matriz ampliada é $[A|b]$, ou seja, o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \end{cases},$$

é um sistema a 3 equações e 4 incógnitas e admite $(0,1,1,0)$ como solução, pois

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

O sistema cuja matriz ampliada é $[A|b]$, ou seja, o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2 \\ - x_2 = -1 \\ -x_1 + x_2 = 2 \end{cases},$$

é um sistema a 3 equações e 2 incógnitas e admite $(-1,1)$ como solução, pois

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(c) Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

O sistema cuja matriz ampliada é $[A|b]$, ou seja, o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_2 = 3 \end{cases},$$

é um sistema a 3 equações e 3 incógnitas e é indeterminado, pois admite $(-1,3,-2)$ e $(-5,3,0)$ como soluções, uma vez que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Exercício 2.3

Sejam A uma matriz real de ordem 4×5 e b uma matriz coluna real de ordem 4×1. Classifique o sistema $Ax = b$ sabendo que

(a) $car(A) = car([A|b]) = 4$.

(b) $car(A) = 3$ e $car([A|b]) = 4$.

(c) o vetor $(1, 0, -1, 1, 2)$ é solução do sistema $Ax = b$.

Resolução:

(a) Como $car(A) = car([A|b])$, o sistema $Ax = b$ é possível. Considerando que a matriz simples do sistema é do tipo 4×5, o sistema é um sistema a 4 equações e 5 incógnitas. Uma vez que $car(A) = 4 < 5 =$ nº incógnitas, o sistema é indeterminado.

(b) Como $car(A) \neq car([A|b])$, o sistema $Ax = b$ é impossível.

(c) O sistema é possível, pois admite pelo menos uma solução. Considerando que a matriz simples do sistema é do tipo 4×5, o sistema é um sistema a 4 equações e 5 incógnitas. Como a matriz A tem 4 linhas, então $car(A) \leq 4$. Logo, $car(A) < 5 =$ nº incógnitas, pelo que o sistema é indeterminado.

Exercício 2.4

Diga, justificando, se cada um dos seguintes sistemas de equações lineares sobre $\mathbb{R}$ é possível e, em caso afirmativo, indique se é determinado ou indeterminado:

(a) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 6x_3 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$

Resolução:

(a) A matriz ampliada do sistema é

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right].$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $[A|b]$, obtemos a matriz $[U|c]$ a seguir indicada

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to l_3 - 2l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_3 \to l_3 - l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = [U|c].$$

As matrizes U e $[U|c]$ são equivalentes por linhas às matrizes A e $[A|b]$, respetivamente. Logo, $car(A) = car(U)$ e $car([A|b]) = car([U|c])$. A matriz U é uma matriz em escada com 2 linhas não nulas, pelo que $car(A) = 2$; a matriz $[U|C]$ é uma matriz em escada com 3 linhas não nulas e, portanto $car([A|b]) = 3$. Como $car(A) = 2 \neq 3 = car([A|b])$, conclui-se que o sistema indicado é impossível.

(b) Seja

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

a matriz ampliada do sistema. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $[A|b]$, obtemos a matriz $[U|c]$ a seguir indicada

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \to l_2 - l_1]{} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_3 \to l_3 - l_2]{} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [U|c].$$

As matrizes U e $[U|c]$ são equivalentes por linhas às matrizes A e $[A|b]$, respetivamente. Logo, $car(A) = car(U)$ e $car([A|b]) = car([U|c])$. A matriz U é uma matriz em escada com 2 linhas não nulas, pelo que $car(A) = 2$; a matriz $[U|c]$ é uma matriz em escada com 2 linhas não nulas e, portanto $car([A|b]) = 2$. Como $car(A) = 2 = car([A|b])$, conclui-se que o sistema indicado é possível. Considerando que $car(A) = 2 < 4 =$ nº incógnitas, concluímos que o sistema é indeterminado.

(c) Seja

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 6 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

a matriz ampliada do sistema. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $[A|b]$, obtemos a matriz $[U|c]$ a seguir indicada

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 6 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - 2l_1 \\ l_3 \to l_3 + l_1}]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_3 \to l_3 - \frac{1}{4}l_2]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right] = [U|c].$$

As matrizes U e $[U|c]$ são equivalentes por linhas às matrizes A e $[A|b]$, respetivamente. Logo, $car(A) = car(U)$ e $car([A|b]) = car([U|c])$. A matriz U é uma matriz em escada com 3 linhas não nulas, pelo que $car(A) = 3$; a matriz $[U|C]$ é uma matriz em escada com 3 linhas não nulas e, portanto $car([A|b]) = 3$. Como $car(A) = 3 = car([A|b])$, conclui-se que o sistema indicado é possível. Considerando que $car(A) = 3 =$ nº incógnitas, concluímos que o sistema é determinado.

(d) Seja

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

a matriz ampliada do sistema. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $[A|b]$, obtemos a matriz

$[U|c]$ a seguir indicada

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_3 \to l_3 - 2l_1 \\ l_4 \to l_4 - l_1}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -6 & -4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{l_3 \to l_3 + l_2 \\ l_4 \to l_4 + 2l_2}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [U|c].$$

As matrizes U e $[U|c]$ são equivalentes por linhas às matrizes A e $[A|b]$, respetivamente. Logo, $car(A) = car(U)$ e $car([A|b]) = car([U|c])$. A matriz U é uma matriz em escada com 2 linhas não nulas, pelo que $car(A) = 2$; a matriz $[U|C]$ é uma matriz em escada com 2 linhas não nulas e, portanto $car([A|b]) = 2$. Como $car(A) = 2 = car([A|b])$, conclui-se que o sistema indicado é possível. Considerando que $car(A) = 2 < 4 =$ nº incógnitas, concluímos que o sistema é indeterminado.

Exercício 2.5

Construa um sistema de equações lineares, de coeficientes reais, de quatro equações a três incógnitas que seja:

(a) Possível e determinado.
(b) Possível e indeterminado.
(c) Impossível.

Resolução:

Sejam $m, n \in \mathbb{K}$ e $Ax = b$ um sistema de equações lineares, com $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Então o sistema $Ax = b$ é:

- possível se e só se $car(A) = car(A|b)$;
- possível determinado se e só se $car(A) = car(A|b) = n$;
- possível indeterminado se e só se $car(A) = car(A|b) = n$.

(a) O sistema (S)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases},$$

representado pela matriz ampliada

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right],$$

é um sistema possível e determinado, uma vez que $car(A) = car(A|b) = 3 =$ nº incógnitas.

(b) O sistema (S)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases},$$

representado pela matriz ampliada

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right],$$

é um sistema possível e indeterminado, uma vez que $car(A) = car(A|b) = 2 < 3 = \text{n}^{\text{o}}$ incógnitas.

(c) O sistema (S)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \end{array}\right.,$$

representado pela matriz ampliada

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right],$$

é um sistema impossível, pois $car(A) = 2 < 3 = car(A|b)$.

Exercício 2.6

Discuta, em função dos parâmetros t e k, cada um dos seguintes sistemas de equações lineares nas incógnitas x_1, x_2, x_3 e de coeficientes em $\mathbb{R}$:

(a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & kx_2 & + & 6x_3 & = & 6 \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & (k-3)x_3 & = & 0 \end{array}\right.$

(b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 4x_2 & + & kx_3 & = & 2 \\ x_1 & + & tx_2 & & & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & kx_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & = & 1 \end{array}\right.$

(c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ -x_1 & - & kx_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -x_1 & - & x_2 & + & (k+1)x_3 & = & t-2 \end{array}\right.$

(d) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & kx_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & t \end{array}\right.$

Resolução:

Um sistema com matriz amplidada $[A|b]$ é:

- impossível se e só se $car(A) \neq car([A|b])$,

- possível determinado se e só se $car(A) = car([A|b]) = \text{n}^{\text{o}}$ incógnitas,

- possível indeterminado se e só se $car(A) = car([A|b]) < \text{n}^{\text{o}}$ incógnitas,

(a) A matriz ampliada do sistema indicado é

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & k & 6 & 6 \\ -1 & 3 & k-3 & 0 \end{array}\right].$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $[A|b]$, tem-se

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & k & 6 & 6 \\ -1 & 3 & k-3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - 2l_1 \\ l_3 \to l_3 + l_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & k+4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & k+4 & 0 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to l_3 - (k+4)l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & -k(k+4) & -k \end{array}\right] = [U|c].$$

As matrizes U e $[U|c]$ são matrizes em escada equivalentes por linhas às matrizes A e $[A|b]$, respetivamente. Assim, $car(A) = car(U)$ e $car([A|b] = car([U|c])$.

Logo,

- $car(A) = 3$ se e só se $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, -4\}$;
- $car(A) = 2$ se e só se $k = 0$ ou $k = -4$;
- $car(A) \neq 1$ para todo $k \in \mathbb{R}$.

Para cada um dos casos anteriores, temos o seguinte:

- se $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, -4\}$, então $car(A) = 3 = car(A|b)$, pelo que o sistema é possível. Como $car(A) =$ nº incógnitas, o sistema é determinado;
- se $k = 0$, então $car(A) = 2 = car(A|b)$, pelo que o sistema é possível. Como $car(A) <$ nº incógnitas, o sistema é indeterminado;
- se $k = -4$, então $car(A) = 2 \neq 3 = car(A|b)$, pelo que o sistema é impossível.

Considerando o observado anteriormente, concluímos que o sistema é:

- impossível se e só se $k = -4$;
- possível determinado se e só se $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, -4\}$;
- possível indeterminado se e só se $k = 0$.

(b) A matriz ampliada do sistema indicado é

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & k & 2 \\ 1 & t & 0 & 1 \\ 1 & 2 & k & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $[A|b]$, tem-se

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & k & 2 \\ 1 & t & 0 & 1 \\ 1 & 2 & k & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_4]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & t & 0 & 1 \\ 1 & 2 & k & 1 \\ 2 & 4 & k & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - l_1 \\ l_3 \to l_3 - l_1 \\ l_4 \to l_4 - 2l_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & t-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_4 \to l_4 - l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & t-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [U|c].$$

As matrizes U e $[U|c]$ são matrizes em escada equivalentes por linhas às matrizes A e $[A|b]$, respetivamente. Assim, $car(A) = car(U)$ e $car([A|b] = car([U|c])$.

Logo,

- $car(A) = 3$ se e só se $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $t \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$;
- $car(A) = 2$ se e só se ($k = 0$ e $t \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$) ou ($t \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ e $t = 2$);
- $car(A) = 1$ se e só se ($k = 0$ e $t = 2$).

Para cada um dos casos anteriores, temos o seguinte:

- se $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $t \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, então $car(A) = 3 = car(A|b)$, pelo que o sistema é possível.
  Como $car(A) =$ nº incógnitas, o sistema é determinado;
- se $k = 0$ e $t \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, então $car(A) = 2 = car(A|b)$, pelo que o sistema é possível.
  Como $car(A) < 3 =$ nº incógnitas, o sistema é indeterminado;
- se $t \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ e $t = 2$, então $car(A) = 2 = car(A|b)$, pelo que o sistema é possível.
  Como $car(A) < 3 =$ nº incógnitas, o sistema é indeterminado;
- se $k = 0$ e $t = 2$, então $car(A) = 1 = car(A|b)$, pelo que o sistema é possível.
  Como $car(A) < 3 =$ nº incógnitas, o sistema é indeterminado.

Considerando o observado anteriormente, concluímos que o sistema é:

- possível, para todo $k, t \in \mathbb{R}$;
- possível determinado se e só se $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $t \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$;
- possível indeterminado se e só se $k = 0$ ou $t = 2$.

(c) A matriz ampliada do sistema indicado é

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -k & 1 & 1 \\ -1 & -1 & k+1 & t-2 \end{array}\right].$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $[A|b]$, tem-se

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -k & 1 & 1 \\ -1 & -1 & k+1 & t-2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 + l_1 \\ l_3 \to l_3 + l_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -k+1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & k & t-1 \end{array}\right] = [U|c].$$

As matrizes U e $[U|c]$ são matrizes em escada equivalentes por linhas às matrizes A e $[A|b]$, respetivamente. Assim, $car(A) = car(U)$ e $car([A|b] = car([U|c])$.

Logo,

- $car(A) = 3$ se e só se $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$;
- $car(A) = 2$ se e só se $k = 0$ ou $k = 1$;
- $car(A) \neq 1$, para todo $k \in \mathbb{R}$.

Para cada um dos casos anteriores, temos o seguinte:

- se $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, então $car(A) = 3 = car(A|b)$, pelo que o sistema é possível.
  Como $car(A) =$ nº incógnitas, o sistema é determinado.
- se $k = 0$ e:
  - $t = 1$, então $car(A) = 2 = car(A|b)$, pelo que o sistema é possível.
    Como $car(A) < 3 =$ nº incógnitas, o sistema é indeterminado.

- $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, então $car(A) = 2 \neq 3 = car(A|b)$, pelo que o sistema é impossível.

- se $k = 1$, então $car(A) = 2 \neq 3 = car(A|b)$, pelo que o sistema é impossível.

Considerando o observado anteriormente, concluímos que o sistema é:

- impossível sse ($k = 0$ e $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$) ou $k = 1$;
- possível determinado se e só se $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$;
- possível indeterminado se e só se $k = 0$ e $t = 1$.

(d) A matriz ampliada do sistema indicado é

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & k & 0 \\ 1 & 2 & 1 & t \end{array}\right].$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $[A|b]$, tem-se

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & k & 0 \\ 1 & 2 & 1 & t \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - l_1 \\ l_3 \to l_3 - 2l_1 \\ l_4 \to l_4 - l_1}]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & k-2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & t-1 \end{array}\right] = [U|c]$$

$$\xrightarrow[l_4 \to l_4 + \frac{1}{2}l_2]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & k-2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & t-\frac{3}{2} \end{array}\right] = [U|c].$$

As matrizes U e $[U|c]$ são matrizes em escada equivalentes por linhas às matrizes A e $[A|b]$, respetivamente. Logo, $car(A) = car(U)$ e $car([A|b] = car([U|c])$. Assim,

- $car(A) = 3$ se e só se $k \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$;
- $car(A) = 2$ se e só se $k = 2$;
- $car(A) \neq 1$ para todo $k \in \mathbb{R}$.

Para cada um dos casos anteriores, temos o seguinte:

- se $k \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ e
  - $t = \frac{3}{2}$, então $car(A) = 3 = car(A|b)$, pelo que o sistema é possível. Como $car(A) = \text{n}^{\text{o}}$ incógnitas, o sistema é determinado;
  - $t \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$, então $car(A) = 3 < 4 = car(A|b)$, pelo que o sistema é impossível;
- se $k = 2$, então $car(A) = 2 < car(A|b)$, pelo que o sistema é impossível.

Considerando o observado anteriormente, concluímos que o sistema é:

- impossível sse $k = 2$ ou ($k \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ e $t \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$),
- possível determinado se e só se $k \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ e $t = \frac{3}{2}$.

Exercício 2.7
Para $t, k \in \mathbb{R}$, sejam

$$A_{k,t} = \begin{bmatrix} k & t & 1 \\ 1 & kt & 1 \\ 1 & t & k \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad b_t = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}).$$

(a) Determine, justificando, os valores de t e k para os quais o sistema $A_{k,t}x = b_t$ é:

i) possível e determinado;

ii) impossível.

(b) Resolva os sistemas $A_{0,2}x = b_2$ e $A_{1,1}x = b_1$.

Resolução:

(a) A matriz ampliada do sistema indicado é

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} k & t & 1 & 1 \\ 1 & kt & 1 & t \\ 1 & t & k & 1 \end{array}\right].$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $[A|b]$, tem-se

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} k & t & 1 & 1 \\ 1 & kt & 1 & t \\ 1 & t & k & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & t & k & 1 \\ 1 & kt & 1 & t \\ k & t & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - l_1 \\ l_2 \to l_2 - kl_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & t & k & 1 \\ 0 & kt - t & 1 - k & t - 1 \\ 0 & t - kt & 1 - k^2 & 1 - k \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_3 \to l_3 + l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & t & k & 1 \\ 0 & t - kt & 1 - k^2 & 1 - k \\ 0 & 0 & 2 - k - k^2 & t - k \end{array}\right] = [U|c].$$

As matrizes U e $[U|c]$ são matrizes em escada equivalentes por linhas às matrizes A e $[A|b]$, respetivamente. Logo, $car(A) = car(U)$ e $car([A|b] = car([U|c])$.

Um sistema com matriz ampliada $[A|b]$ é:

- impossível se e só se $car(A) \neq car([A|b])$;
- possível determinado se e só se $car(A) = car([A|b]) = \text{n}^{\text{o}}$ incógnitas $= 3$.

Assim, o sistema é:

- impossível sse $(k = 1$ e $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\})$ ou $(k = -2$ e $t \in \mathbb{R} \setminus \{-2\})$ ou $(k = -1$ e $t = 0)$;
- possível determinado se e só se $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $k \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$.

(b) Resolução do sistema $A_{0,2}x = b_2$.

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $[A_{0,2}|b_2]$, obtem-se a seguinte matriz em escada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right].$$

Assim, o sistema $A_{0,2} = b_2$ é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema por substituição inversa, obtem-se $x_3 = 1$, $x_2 = 0$ e $x_1 = 1$. Portanto,

$$Sol_{(S)} = \{(1, 0, 1)\}.$$

Resolução do sistema $A_{1,1}x = b_1$.

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $[A_{1,1}|b_1]$, obtem-se a seguinte matriz em escada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Assim, o sistema $A_{1,1} = b_1$ é equivalente ao sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array} \right.$$

donde se obtem $x_1 = 1 - x_2 - x_3$.

Logo,

$$Sol_{(S)} = \{(1 - \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_2, \alpha_3) \,|\, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Exercício 2.8

Sejam $Ax = 0$ um sistema determinado, de m equações lineares em n incógnitas, e b uma matriz coluna com m linhas. Mostre que o sistema $Ax = b$ ou é impossível ou é possível e determinado.

Resolução: Considerando que $Ax = 0$ é um sistema de m equações lineares em n incógnitas, tem-se $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Admitamos que o sistema $Ax = 0$ é determinado. Então $car(A) = $ nº incógnitas $= n$. O sistema $Ax = b$ ou é impossível ou é possível. Se $Ax = b$ é possível, então o sistema é determinado, uma vez que $car(A) = n = $ nº incógnitas.

Exercício 2.9

Considere o sistema de equações lineares $Ax = b$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R}), \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) \quad \text{e } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

(a) Resolva o sistema $Ax = 0$.

(b) Verifique que $[\ -1 \quad 1 \quad 1 \quad 2\ ]^T$ é solução do sistema $Ax = b$. Determine o conjunto de soluções do sistema $Ax = b$.

Resolução:

(a) O sistema (S) correspondente a $Ax = 0$ é sempre possível, pois é um sistema homogéneo. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - 2l_1 \\ l_3 \to l_3 - 3l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[l_3 \to l_3 - l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

A matriz U é equivalente por linhas à matriz A, pelo que o sistema homogéneo com matriz simples U é equivalente ao sistema $Ax = 0$. O sistema correspondente a $Ux = 0$ é o sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \\ & - & 2x_2 & - & 2x_3 & & & = & 0 \end{array} \right.$$

donde se obtem $x_2 = -x_3$ e $x_1 = x_3 - x_4$.

Logo,

$$Sol_{(S)} = \{(\alpha_3 - \alpha_4, -\alpha_3, \alpha_3, \alpha_4) \mid \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}\}.$$

(b) O vetor $[\begin{array}{cccc} -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}]^T$ é solução do sistema $Ax = b$, pois

$$A \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = b.$$

Dado $w \in \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$, w é solução de $Ax = b$ se e só se $w = y + z$, onde y é uma solução de $Ax = b$ e z é uma solução de $Ax = 0$. Assim, o conjunto de soluções do sistema representado por $Ax = b$ é

$$\begin{aligned} & \{(-1,1,1,2) + (\alpha_3 - \alpha_4, -\alpha_3, \alpha_3, \alpha_4) \mid \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}\} \\ = \; & \{(-1 + \alpha_3 - \alpha_4, 1 - \alpha_3, 1 + \alpha_3, 2 + \alpha_4) \mid \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Exercício 2.10

Considere o sistema de equações lineares $Ax = b$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}),\ b = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R}) \text{ e } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

(a) Resolva o sistema $Ax = 0$ e verifique se $[\begin{array}{cccc} -2 & 3 & 1 & -1 \end{array}]^T$ é solução de $Ax = b$.

(b) Determine o conjunto de soluções de $Ax = b$.

Resolução:

(a) O sistema (S) correspondente a $Ax = 0$ é sempre possível, pois é um sistema homogéneo. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - 2l_1 \\ l_3 \to l_3 - l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -9 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -2 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{l_3 \to l_3 + 2l_2 \\ l_4 \to l_4 + 3l_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_4 \to l_4 - \frac{1}{2}l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} = U.$$

A matriz U é equivalente por linhas à matriz A, pelo que o sistema homogéneo com matriz simples U é equivalente ao sistema $Ax = 0$. O sistema correspondente a $Ux = 0$ é o sistema a seguir indicado

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ & & & & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ & & & & & - & 8x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

donde se obtem $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

Logo, o conjunto de soluções do sistema (S) é $\{(0,0,0,0)\}$.

O vetor $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ é solução do sistema $Ax = b$, pois

$$A \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = b.$$

(b) Dado $w \in \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$, w é solução de $Ax = b$ se e só se $w = y + z$, onde y é uma solução de $Ax = b$ e z é uma solução de $Ax = 0$. Assim, o conjunto de soluções do sistema representado por $Ax = b$ é

$$\{(-2,3,1,-1) + (0,0,0,0)\} = \{(-2,3,1,-1)\}.$$

Exercício 2.11

Diga se estão em forma de escada reduzida cada uma das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. (f) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Resolução:

Sejam $m, n \in \mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Diz-se que A é uma ***matriz em escada reduzida*** ou que está em ***forma de escada reduzida*** se satisfaz as seguintes condições:

(i) A é uma matriz em escada;

(ii) se uma linha tem elementos não nulos, então o primeiro elemento não nulo da linha é igual a 1;

(iii) se o primeiro elemento não nulo de uma linha i está na coluna j, então todos os elementos da coluna j, com excepção do elemento que está na linha i, são iguais a zero.

Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ diz-se uma **matriz em escada** se satisfaz as duas condições seguintes:

(1) se o primeiro elemento não nulo numa linha está na coluna j, então a linha seguinte começa com pelo menos j elementos nulos;

(2) se houver linhas totalmente constituídas por zeros, elas aparecem depois das outras.

(a) A matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

não é uma mariz em forma de escada reduzida. Embora as condições (i) e (ii) sejam satisfeitas, a condição (iii) não se verifica (o primeiro elemento não nulo da linha 2 está na coluna 3 e a linha 1 tem um elemento não nulo na coluna 3).

(b) A matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz em escada (satisfaz (1) e (2)) e satisfaz as condições (ii) e (iii), logo é uma matriz em forma de escada reduzida.

(c) A matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

não é uma matriz em forma de escada reduzida, pois não satisfaz a condição (ii) (o primeiro elemento não nulo da linha 2 não é igual a 1).

(d) A matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

não é uma matriz em forma de escada reduzida, pois não é uma matriz em escada (o primeiro elemento não nulo da linha 1 estão na coluna 5 e as linhas de baixo não começam com 5 zeros.

(e) A matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

é uma matriz em escada (satisfaz (1) e (2)) e satisfaz as condições (ii) e (iii), logo é uma matriz em forma de escada reduzida.

(f) A matriz

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz em escada (satisfaz (1) e (2)) e satisfaz as condições (ii) e (iii), logo é uma matriz em forma de escada reduzida.

Exercício 2.12

Usando o algoritmo de Gauss-Jordan calcule, se possível, a inversa de:

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Resolução:

(a) Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$. A matriz A é uma matriz do tipo 2×2. Logo, A é invertível se e só se $car(A) = 2$. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, temos

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \to l_2 - \frac{3}{2} l_1]{} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

A matriz U é uma matriz em escada, equivalente por linhas à matriz A e tem 1 linha não nula. Logo $car(A) = 1$. Como $car(A) \neq 2$, a matriz A não é invertível.

(b) Seja
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$
A matriz A é uma matriz do tipo 3×3. Logo, A é invertível se e só se $car(A) = 3$. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, tem-se
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \to l_2 - \frac{1}{2}l_1]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = U.$$
A matriz U é uma matriz em escada, equivalente por linhas à matriz A e tem 3 linhas não nulas. Logo $car(A) = 3$ e, portanto, a matriz A é invertível.

Determinemos A^{-1}, aplicando o método de eliminação de Gauss-Jordan à matriz $[A|I_3]$:
$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \to l_2 - \frac{1}{2}l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - l_3 \\ l_1 \to l_1 + 2l_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_1 \to \frac{1}{2}l_1 \\ l_2 \to -l_2 \\ l_3 \to -l_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] = [I_3|A^{-1}].$$
Logo,
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(c) Seja
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$
A matriz A é uma matriz do tipo 3×3. Logo, A é invertível se e só se $car(A) = 3$. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, tem-se
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 + l_1 \\ l_3 \to l_3 - l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = U.$$
A matriz U é uma matriz em escada, equivalente por linhas à matriz A e tem 3 linhas não nulas, logo $car(A) = 3$. Portanto, a matriz A é invertível.

Determinemos A^{-1}, aplicando o método de eliminação de Gauss-Jordan à matriz $[A|I_3]$:
$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 + l_1 \\ l_3 \to l_3 - l_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \to l_1 - \frac{2}{3}l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow[l_1 \to l_1 + l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to \frac{1}{3}l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right] = [I_3|A^{-1}].$$

Logo,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

(d) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é uma matriz do tipo 4×4. Logo, A é invertível se e só se $car(A) = 4$. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3 - 3l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_4 \to l_4 - 3l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = U.$$

A matriz U é uma matriz em escada, equivalente por linhas à matriz A e tem 4 linhas não nulas, logo $car(A) = 4$. Portanto, a matriz A é invertível.

Determinemos A^{-1}, aplicando o método de eliminação de Gauss-Jordan à matriz $[A|I_4]$:

$$[A|I_4] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to l_3 - 3l_1]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_4 \to l_4 - 3l_2]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_1 \to l_1 + l_4 \\ l_2 \to l_2 + l_4 \\ l_3 \to l_3 - l_4}]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -3 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_1 \to l_1 + l_3]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -3 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \to l_1 - l_2]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -3 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{l_3 \to -\frac{1}{2}l_3 \\ l_4 \to -\frac{1}{2}l_4}]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] = [I_3|A^{-1}].$$

Logo,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(f) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é invertível e tem-se

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

(g) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é invertível e tem-se

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Exercício 2.13

Determine os valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para os quais as seguintes matrizes são invertíveis:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 5+\alpha \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & \alpha+3 & 2 \\ 2 & 4 & \beta \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 1 \\ 1 & \beta & \beta \\ 1 & \alpha+\beta & \beta \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \beta \\ \beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} \alpha & -1 & 1 & \beta \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$

Resolução:

(a) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 5+\alpha \end{bmatrix}.$$

A matriz A é uma matriz do tipo 3×3. Logo, A é invertível se e só se $car(A) = 3$. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 5+\alpha \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - l_1 \\ l_3 \to l_3 - 2l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5+\alpha \end{bmatrix} = U.$$

A matriz U é equivalente por linhas à matriz A. Logo $car(A) = car(U)$ e, portanto,

$$car(A) = 3 \text{ se e só se } \alpha + 5 \neq 0 \text{ se e só se } \alpha \neq -5.$$

Assim, A é invertível se e só se $\alpha \neq -5$.

(b) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & \alpha+3 & 2 \\ 2 & 4 & \beta \end{bmatrix}.$$

A matriz A é uma matriz do tipo 3×3. Logo, A é invertível se e só se $car(A) = 3$. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & \alpha+3 & 2 \\ 2 & 4 & \beta \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - l_1 \\ l_3 \to l_3 - 2l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & \alpha+1 & 1 \\ 0 & 0 & \beta-2 \end{bmatrix} = U.$$

A matriz U é equivalente por linhas à matriz A. Logo $car(A) = car(U)$ e, portanto,

$$car(A) = 3 \text{ se e só se } \alpha + 1 \neq 0 \text{ e } \beta - 2 \neq 0 \text{ se e só se } \alpha \neq -1 \text{ e } \beta \neq 2.$$

Assim, A é invertível se e só se $\alpha \neq -1$ e $\beta \neq 2$.

(c) Seja

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 1 \\ 1 & \beta & \beta \\ 1 & \alpha+\beta & \beta \end{bmatrix}.$$

A matriz A é uma matriz do tipo 3×3. Logo, A é invertível se e só se $car(A) = 3$. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 1 \\ 1 & \beta & \beta \\ 1 & \alpha+\beta & \beta \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & \beta & \beta \\ \alpha & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha+\beta & \beta \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - \alpha l_1 \\ l_3 \to l_3 - l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & \beta & \beta \\ 0 & \alpha-\beta\alpha & 1-\beta\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & \beta & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha-\beta\alpha & 1-\beta\alpha \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3 - (1-\beta)l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & \beta & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\beta\alpha \end{bmatrix} = U.$$

A matriz U é equivalente por linhas à matriz A. Logo $car(A) = car(U)$ e, portanto,

$$car(A) = 3 \text{ se e só se } \alpha \neq 0 \text{ e } 1 - \beta\alpha \neq 0 \text{ se e só se } \alpha \neq 0 \text{ e } \beta \neq \frac{1}{\alpha}.$$

Assim, A é invertível se e só se $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq \frac{1}{\alpha}$.

(d) Seja

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é uma matriz do tipo 3×3. Logo, A é invertível se e só se $car(A) = 3$. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \beta \\ \alpha & \alpha & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - l_1 \\ l_3 \to l_3 - \alpha l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \beta-1 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{bmatrix} = U.$$

A matriz U é equivalente por linhas à matriz A, pelo que $car(A) = car(U)$. Logo

$$car(A) \neq 3, \text{ para quaisquer } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Assim, A não é invertível quaisquer que sejam os valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(e) Seja

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \beta \\ \beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

A matriz A é uma matriz do tipo 4×4. Logo, A é invertível se e só se $car(A) = 4$. Para analisar em que condições a matriz A é invertível, dividimos o estudo em dois casos: $\alpha = 0$ e $\alpha \neq 0$.

Caso $\alpha = 0$: Neste caso, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta \\ \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta \\ \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[l_3 \leftrightarrow l_4]{} \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} = U.$$

A matriz U é equivalente por linhas à matriz A. Logo $car(A) = car(U)$ e, portanto,

$$car(A) = 4 \text{ se e só se } \beta \neq 0.$$

Caso $\alpha \neq 0$: Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \beta \\ \beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \to l_2 - \frac{\beta}{\alpha} l_1]{} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 & -\frac{\beta^2}{\alpha} \\ 0 & \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3 - \frac{\beta}{\alpha} l_2]{} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 & -\frac{\beta^2}{\alpha} \\ 0 & 0 & \alpha & \frac{\beta^3}{\alpha^2} \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[l_4 \to l_4 - \frac{\beta}{\alpha} l_3]{} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 & -\frac{\beta^2}{\alpha} \\ 0 & 0 & \alpha & \frac{\beta^3}{\alpha^2} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - \frac{\beta^4}{\alpha^3} \end{bmatrix} = U.$$

A matriz U é equivalente por linhas à matriz A. Logo $car(A) = car(U)$ e, portanto,

$$car(A) = 4 \text{ se e só se } \alpha \neq 0 \text{ e } \alpha - \frac{\beta^4}{\alpha^3} \neq 0 \text{ se e só se } \alpha \neq 0 \text{ e } \alpha \neq \pm\beta.$$

Assim, A é invertível se e só se ($\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$) ou ($\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq \pm\beta$)

(f) Seja

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -1 & 1 & \beta \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}.$$

A matriz A é uma matriz do tipo 4×4. Logo, A é invertível se e só se $car(A) = 4$. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -1 & 1 & \beta \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & -1 & 1 & \beta \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3 - \alpha l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & -1 & 1-2\alpha & \beta-2\alpha \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{l_3 \to l_3 + l_2 \\ l_4 \to l_4 - l_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1-\alpha & 1+\beta-2\alpha \\ 0 & 0 & 1-\alpha & \alpha-1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_4 \to l_4 - l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1-\alpha & 1+\beta-2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 3\alpha-\beta-2 \end{bmatrix} = U.$$

A matriz U é equivalente por linhas à matriz A. Logo $car(A) = car(U)$ e, portanto,

$$\begin{array}{lll} car(A) = 4 & \text{se e só se} & 1-\alpha \neq 0 \text{ e } 3\alpha-\beta-2 \neq 0 \\ & \text{se e só se} & \alpha \neq 1 \text{ e } \beta \neq 3\alpha - 2. \end{array}$$

Exercício 2.14

Considere a matriz real

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que a matriz A é invertível e calcule a sua inversa usando o método de eliminação de Gauss-Jordan.

(b) Resolva o sistema $Ax = b$, onde $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Resolução:

(a) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é uma matriz do tipo 3×3. Logo, A é invertível se e só se $car(A) = 3$. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, obtemos a matriz em escada U a seguir indicada

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[l_3 \to l_3 - 2l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = U.$$

A matriz U é uma matriz em escada, equivalente por linhas à matriz A e tem 3 linhas não nulas, logo $car(A) = 3$. Portanto, a matriz A é invertível.

Determinemos A^{-1}, aplicando o método de eliminação de Gauss-Jordan à matriz $[A|I_3]$:

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_3 \to l_3 - 2l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_2 \to l_2 + l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \to l_1 + 2l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{l_2 \to -l_2 \\ l_3 \to \frac{1}{2}l_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right] = [I_3|A^{-1}].$$

Logo,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Tem-se

$$\begin{aligned} Ax = b \quad & \Leftrightarrow \quad A^{-1}Ax = A^{-1}b \\ & \Leftrightarrow \quad x = A^{-1}b \\ & \Leftrightarrow \quad x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Exercício 2.15

Sejam $A = [-2 + 2(i-j)^2]_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,2,3}}$.

(a) Verifique que A é invertível e calcule a sua inversa usando o método de eliminação de Gauss-Jordan.

(b) Resolva o sistema $Ax = b$, onde $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Resolução:

(a) Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é uma matriz do tipo 3×3. Logo, A é invertível se e só se $car(A) = 3$. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l3 + 3l_1]{} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}.$$

A matriz U é uma matriz em escada, equivalente por linhas à matriz A e tem 3 linhas não nulas, logo $car(A) = 3$. Portanto, a matriz A é invertível.

Determinemos A^{-1}, aplicando o método de eliminação de Gauss-Jordan à matriz $[A|I_3]$:

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} -2 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to l_3 + 3l_1]{} \left[\begin{array}{rrr|rrr} -2 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_1 \to l_1 - \frac{3}{8}l_3]{} \left[\begin{array}{rrr|rrr} -2 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{3}{8} \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_1 \to -\frac{1}{2}l_1 \\ l_2 \to -\frac{1}{2}l_2 \\ l_3 \to \frac{1}{16}l_3}]{} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & 0 & \frac{3}{16} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{16} & 0 & \frac{1}{16} \end{array}\right].$$

Logo,

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{16} & 0 & \frac{3}{16} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{16} & 0 & \frac{1}{16} \end{array}\right].$$

(b) Tem-se

$$\begin{aligned} Ax = b \quad &\Leftrightarrow \quad A^{-1}Ax = A^{-1}b \\ &\Leftrightarrow \quad x = A^{-1}b \\ &\Leftrightarrow \quad x = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ -2 \\ \frac{1}{2} \end{array}\right]. \end{aligned}$$

3 Espaços Vetoriais

Exercícios e resoluções

Exercício 3.1

Seja $n \in \mathbb{N}$. Considere o conjunto $\mathbb{R}^n$ algebrizado com as aplicações $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definidas, respetivamente, por

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n),$$
$$\alpha \cdot (x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n),$$

para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Mostre que são válidas as seguintes propriedades:

(1) $\forall_{x,y \in \mathbb{R}^n} \quad x + y = y + x;$

(2) $\forall_{x,y,z \in \mathbb{R}^n} \quad x + (y + z) = (x + y) + z;$

(3) $\forall_{x \in \mathbb{R}^n} \quad x + 0_{\mathbb{R}^n} = x = 0_{\mathbb{R}^n} + x;$

(4) $\forall_{x \in \mathbb{R}^n} \exists_{x' \in \mathbb{R}^n} \quad x + x' = 0_{\mathbb{R}^n} = x' + x;$

(5) $\forall_{x,y \in \mathbb{R}^n} \forall_{\alpha \in \mathbb{R}} \quad \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y;$

(6) $\forall_{x \in \mathbb{R}^n} \forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}} \quad (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x;$

(7) $\forall_{x \in \mathbb{R}^n} \forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}} \quad (\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x);$

(8) $\forall_{x \in \mathbb{R}^n} \quad 1 \cdot x = x.$

Resolução:

(a) Considerando as propriedades da adição e da multiplicação de números reais, verificam-se as condições seguintes:

(1) Para quaisquer $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) \\ &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) && \text{(adição de elementos de } \mathbb{R}^n\text{)} \\ &= (y_1 + x_1, \ldots, y_n + x_n) && \text{(comutatividade da adição em } \mathbb{R}\text{)} \\ &= (y_1, \ldots, y_n) + (x_1, \ldots, x_n) && \text{(adição de elementos de } \mathbb{R}^n\text{)} \\ &= y + x. \end{aligned}$$

(2) Para quaisquer $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n), z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{array}{rcll} x + (y + z) & = & (x_1, \ldots, x_n) + ((y_1, \ldots, y_n) + (z_1, \ldots, z_n)) & \\ & = & (x_1, \ldots, x_n) + (y_1 + z_1, \ldots, y_n + z_n) & \text{(adição de elementos de } \mathbb{R}^n) \\ & = & (x_1 + (y_1 + z_1), \ldots, x_n + (y_n + z_n))) & \text{(adição de elementos de } \mathbb{R}^n) \\ & = & ((x_1 + y_1) + z_1, \ldots, (x_n + y_n) + z_n,) & \text{(associatividade da adição em } \mathbb{R}) \\ & = & (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) + (z_1, \ldots, z_n) & \text{(adição de elementos de } \mathbb{R}^2) \\ & = & ((x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n)) + (z_1, \ldots, z_n) & \text{(adição de elementos de } \mathbb{R}^n) \\ & = & (x + y) + z. & \end{array}$$

(3) Existe $0_{\mathbb{R}^n} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ tal que, para qualquer $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{array}{rcll} 0_{\mathbb{R}^n} + x & = & (0, \ldots, 0) + (x_1, \ldots, x_n) & \\ & = & (0 + x_1, \ldots, 0 + x_n) & \text{(adição de elementos de } \mathbb{R}^n) \\ & = & (x_1, \ldots, x_n) & \text{(0 é o elemento neutro da adição usual em } \mathbb{R}) \\ & = & (x_1 + 0, \ldots, x_n + 0) & \text{(0 é o elemento neutro da adição usual em } \mathbb{R}) \\ & = & (x_1, \ldots, x_n) + (0, 0) & \text{(adição de elementos de } \mathbb{R}^n) \\ & = & x + 0_{\mathbb{R}^n}. & \end{array}$$

(4) Para qualquer $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, existe $x' = (-x_1, \ldots, -x_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{array}{rcll} x + x' & = & (x_1, \ldots, x_n) + (-x_1, \ldots, -x_n) & \\ & = & (x_1 - x_1, \ldots, x_n - x_n) & \text{(adição de elementos de } \mathbb{R}^n) \\ & = & 0_{\mathbb{R}^n} & (-x_i \text{ é o simétrico de } x_i) \\ & = & (-x_1 + x_1, \ldots, -x_n + x_n) & (-x_i \text{ é o simétrico de } x_i) \\ & = & (-x_1, \ldots, -x_n) + (x_1, \ldots, x_n) & \text{(adição de elementos de } \mathbb{R}^n) \\ & = & x' + x. & \end{array}$$

(5) Para quaisquer $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcll} \alpha(x + y) & = & \alpha((x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n)) & \\ & = & \alpha(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) & \text{(adição de elementos de } \mathbb{R}^n) \\ & = & (\alpha(x_1 + y_1), \ldots, \alpha(x_n + y_n)) & \text{(multiplicação de um escalar por um elemento de } \mathbb{R}^n) \\ & = & (\alpha x_1 + \alpha y_1, \ldots, \alpha x_n + \alpha y_n) & \text{(distributividade em } (\mathbb{R}, +, \cdot)) \\ & = & (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) + (\alpha y_1, \ldots, \alpha y_n) & \text{(adição de elementos de } \mathbb{R}^n) \\ & = & \alpha(x_1, \ldots, x_n) + \alpha(y_1, \ldots, y_n) & \text{(multiplicação de um escalar por um elemento de } \mathbb{R}^n) \\ & = & \alpha x + \alpha y. & \end{array}$$

(6) Para quaisquer $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcll} (\alpha + \beta)x & = & (\alpha + \beta)(x_1, \ldots, x_n) & \\ & = & ((\alpha + \beta)x_1, \ldots, (\alpha + \beta)x_n) & \text{(multiplicação de um escalar por um elemento de } \mathbb{R}^n) \\ & = & (\alpha x_1 + \beta x_1, \ldots, \alpha x_n + \beta x_n) & \text{(distributividade em } (\mathbb{R}, +, \cdot)) \\ & = & (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) + (\beta x_1, \ldots, \beta x_n) & \text{(adição de elementos de } \mathbb{R}^n) \\ & = & \alpha(x_1, \ldots, x_n) + \beta(x_1, \ldots, x_n) & \text{(multiplicação de um escalar por um elemento de } \mathbb{R}^n) \\ & = & \alpha x + \alpha y. & \end{array}$$

(7) Para quaisquer $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcll} (\alpha\beta)x & = & (\alpha\beta)(x_1, \ldots, x_n) & \\ & = & ((\alpha\beta)x_1, \ldots, (\alpha\beta)x_n) & \text{(multiplicação de um escalar por um elemento de } \mathbb{R}^n) \\ & = & (\alpha(\beta x_1), \ldots, \alpha(\beta x_n)) & \text{(associatividade da multiplicação em } \mathbb{R}) \\ & = & \alpha(\beta x_1, \ldots, \beta x_n) & \text{(multiplicação de um escalar por um elemento de } \mathbb{R}^n) \\ & = & \alpha(\beta(x_1, \ldots, x_n)) & \text{(multiplicação de um escalar por um elemento de } \mathbb{R}^n) \\ & = & \alpha(\beta x). & \end{array}$$

(8) Para qualquer $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} 1 \cdot x &= (1 \cdot x_1, \dots, 1 \cdot x_n) && \text{(multiplicação de um escalar por um elemento de } \mathbb{R}^n\text{)} \\ &= (x_1, \dots, x_n) && \text{(1 é o elemento neutro da multiplicação usual em } \mathbb{R}\text{)} \\ &= x. \end{aligned}$$

Exercício 3.2

Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$ e S um subespaço do espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$. Mostre que

(a) Se $v \in S$, então $-v \in S$.

(b) Se $u, v \in S$, então $u - v \in S$.

(c) Se $u + v \in S$ e $u \in S$, então $v \in S$.

(d) Se existe $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $\alpha v \in S$, então $v \in S$.

Resolução:

(b) Se S é um subespaço do espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$, então, para quaisquer $v \in S$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha v \in S$. Assim, se $v \in S$, tem-se $(-1)v \in S$. Além disso, $(-1)v = -v$, pois

$$(-1)v + v = -1 + 1v = 0v = 0_{\mathbb{R}^n} = 0_{\mathbb{R}^n} v = (1_{\mathbb{K}} - 1_{\mathbb{K}})v = v + (-1_{\mathbb{K}})v.$$

Logo, $-v \in S$.

(b) Sejam $u, v \in S$. Pela alínea anterior, tem-se $-v \in S$. Como S é um subespaço do espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$, então é fechado para a adição de vetores, isto é, para quaisquer $x, y \in S$, tem-se $x + y \in S$. Por conseguinte, como $u \in S$ e $-v \in S$, segue que $u + (-v) = u - v \in S$.

(c) Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$ tais que $u + v \in S$ e $u \in S$. Pela alínea anterior, tem-se $-u \in S$. Como S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, então é fechado para a adição de vetores, isto é, para quaisquer $x, y \in S$, tem-se $x + y \in S$. Por conseguinte, como $u + v \in S$ e $-u \in S$, segue que $-u + (u + v) \in S$. Como $-u + (u + v) = (-u + u) + v = 0_V + v = v$, então $v \in S$.

(d) Admitamos que existe $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $\alpha v \in S$. Como $\alpha \neq 0$, existe $\alpha^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha\alpha^{-1} = 1 = \alpha^{-1}\alpha$. Então, como $\alpha v \in S$ e S é fechado para a operação de multiplicação de um escalar por um vetor, tem-se $\alpha^{-1}(\alpha v) \in S$. Uma vez que $\alpha^{-1}(\alpha v) = (\alpha^{-1}\alpha)v = 1v = v$, então $v \in S$.

Exercício 3.3

Determine quais dos seguintes conjuntos são subespaços do espaço vetorial real indicado.

(a) $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 0 \text{ e } x_2 + 2x_3 = 0\}$ em $\mathbb{R}^3$.

(b) $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = -5x_2 \text{ e } x_2 - 3x_3 = 0\}$ em $\mathbb{R}^4$.

(c) $W_3 = \{(0, a, b, -1) \in \mathbb{R}^4 : a, b \in \mathbb{R}\}$ em $\mathbb{R}^4$.

(d) $W_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_3 = 2 \text{ e } x_2 - 3x_3 = 0\}$ em $\mathbb{R}^4$.

(e) $W_5 = \{a(1, 2) \in \mathbb{R}^2 : a \in \mathbb{R}\}$ em $\mathbb{R}^2$.

(f) $W_6 = \{a(1, 2) + b(-3, 1) \in \mathbb{R}^2 : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}_0^+\}$ em $\mathbb{R}^2$.

Resolução:

Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Um conjunto S é um subsepaço vetorial de V se e só se satisfaz as condições seguintes:

(1) $S \subseteq V$.

(2) $S \neq \emptyset$;

(3) $\forall_{x,y \in V}\,(x, y \in S \Rightarrow x + y \in S)$;

(4) $\forall_{x \in V} \forall_{\alpha \in \mathbb{K}}\,(x \in S \Rightarrow \alpha x \in S)$.

(a) O conjunto W_1 é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$. De facto:

(1) Por definição de W_1, tem-se $W_1 \subseteq \mathbb{R}^3$.

(2) Uma vez que $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in W_1$, então $W_1 \neq \emptyset$.

(3) Para quaisquer $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in W_1$, tem-se $x, y \in \mathbb{R}^3$ e

$$\begin{array}{ll} x_1 - x_2 = 0, & x_2 + 2x_3 = 0, \\ y_1 - y_2 = 0, & y_2 + 2y_3 = 0. \end{array}$$

Por conseguinte, $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in \mathbb{R}^3$ e

$$\begin{array}{l} (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 0 + 0 = 0, \\ (x_2 + y_2) + 2(x_3 + y_3) = (x_2 + 2x_3) + (y_2 + 2y_3) = 0 + 0 = 0. \end{array}$$

Logo, $x + y \in W_1$.

(4) Para quaisquer $x = (x_1, x_2, x_3) \in W_1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se $x \in \mathbb{R}^3$ e

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_2 + 2x_3 = 0.$$

Logo, $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) \in \mathbb{R}^3$ e

$$\begin{array}{l} (\alpha x_1) - (\alpha x_2) = \alpha(x_1 - x_2) = \alpha 0 = 0, \\ (\alpha x_2) + 2(\alpha x_3) = \alpha(x_2 + 2x_3) = \alpha 0 = 0. \end{array}$$

Portanto, $\alpha x \in W_1$.

De 1), 2), 3) e 4) conclui-se que W_1 é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$.

(b) O conjunto W_2 é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, pois:

(1) Por definição de W_2, tem-se $W_2 \subseteq \mathbb{R}^4$.

(2) $W_2 \neq \emptyset$, uma vez que $0_{\mathbb{R}^4} = (0, 0, 0, 0) \in W_2$.

(3) Para quaisquer $x = (x_1, x_2, x_3, x_4), y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in W_2$, tem-se $x, y \in \mathbb{R}^4$ e

$$\begin{array}{ll} x_1 = -5x_2, & x_2 - 3x_3 = 0, \\ y_1 = -5y_2, & y_2 - 3y_3 = 0. \end{array}$$

Logo, $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4) \in \mathbb{R}^4$ e

$$\begin{array}{l} x_1 + y_1 = -5x_2 - 5y_2 = -5(x_2 + y_2), \\ (x_2 + y_2) - 3(x_3 + y_3) = (x_2 - 3x_3) + (y_2 - 3y_3) = 0 + 0 = 0. \end{array}$$

e, portanto, $x + y \in W_2$.

(4) Para quaisquer $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in W_2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se $x \in \mathbb{R}^4$ e

$$x_1 = -5x_2, \quad x_2 - 3x_3 = 0.$$

Logo, $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4) \in \mathbb{R}^4$ e

$$\begin{array}{l} \alpha x_1 = \alpha(-5x_2) = -5(\alpha x_2), \\ (\alpha x_2) - 3(\alpha x_3) = \alpha(x_2 - 3x_3) = \alpha 0 = 0. \end{array}$$

Portanto, $\alpha x \in W_2$.

De 1), 2), 3) e 4) conclui-se que W_2 é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$.

(c) O conjunto W_3 não é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$, pois não satisfaz a condição ii). De facto, tem-se $(0, 1, 1, -1), (0, 2, 2, -1) \in W_3$ e

$$(0, 1, 1, -1) + (0, 2, 2, -1) = (0, 3, 3, -2) \notin W_3.$$

(d) O conjunto W_4 não é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$, pois $x = (1, 3, 1, 0) \in W_4$, $y = (3, -3, -1, 0) \in W_4$ e $x + y = (4, 0, 0, 0) \notin W_4$.

(e) O conjunto W_5 é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$. De facto:

(1) Por definição de W_5, tem-se $W_5 \subseteq \mathbb{R}^2$.

(2) Uma vez que $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) = 0(1, 2) \in W_5$, então $W_5 \neq \emptyset$.

(3) Para quaisquer $x, y \in W_5$, tem-se $x, y \in \mathbb{R}^2$ e $x = a(1, 2)$, $y = b(1, 2)$, para alguns $a, b \in \mathbb{R}^2$. Por conseguinte, $x + y = a(1, 2) + b(1, 2) \in \mathbb{R}^2$ e

$$x + y = a(1, 2) + b(1, 2) = (a + b)(1, 2), \text{ com } a + b \in \mathbb{R}.$$

Logo, $x + y \in W_5$.

(4) Para quaisquer $x \in W_5$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se $x = a(1, 2)$, para algum $a \in \mathbb{R}$, pelo que $\alpha x \in \mathbb{R}^2$ e

$$\alpha x = \alpha(a(1, 2)) = (\alpha a)(1, 2), \text{ com } \alpha a \in \mathbb{R}.$$

Portanto, $\alpha x \in W_5$.

De 1), 2), 3) e 4) conclui-se que W_5 é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$.

(f) O conjunto W_6 não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$, pois $(-3, 1) = 0(1, 2) + 1(-3, 1) \in W_6$, $-1 \in \mathbb{R}$ e $-1(-3, 1) = (3, -1) \notin W_6$ (para quaisquer $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}_0^+$, $(3, -1) \neq a(1, 2) + b(-3, 1)$).

Exercício 3.4

Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$ e, para cada $t \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$V_t = \{(1 - t, (3 - t)x, t^2 - 1) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}.$$

Determine, caso existam, os valores de t para os quais V_t é subespaço vetorial do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$.

Resolução:

Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e S um subconjunto de V. Então S é um subsepaço vetorial de V se e só se satisfaz as condições seguintes:

S$_1$) $S \neq \emptyset$;

S$_2$) $\forall_{x,y \in V}\, (x, y \in S \Rightarrow x + y \in S)$;

S$_3$) $\forall_{x \in V} \forall_{\alpha \in \mathbb{K}}\, (x \in S \Rightarrow \alpha x \in S)$.

Note-se que na caracterização anterior, a condição S$_2$) pode ser substituída por $0_V \in S$.

Assim, assumindo que V_t é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$, tem-se $(0, 0, 0) \in V_t$, pelo que

$$(0, 0, 0) = (1 - t, (3 - t)x, t^2 - 1)$$

para algum $x \in \mathbb{R}$. Da igualdade anterior resulta que $t = 1$.

Verifiquemos se $V_1 = \{(0, 2x, 0) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. Ora, por definição de V_1, é imediato que $V_1 \subseteq \mathbb{R}^3$. Além disso, verificam-se as seguintes condições:

S$_1$) O conjunto V_1 é não vazio, pois $(0, 0, 0) \in V_1$.

S$_2$) Para quaisquer $a, b \in V_1$, tem-se $a = (0, 2x, 0)$ e $b = (0, 2y, 0)$, para alguns $x, y \in \mathbb{R}$. Então $a + b \in \mathbb{R}^3$ e

$$a + b = (0, 2x + 2y, 0) = (0, 2(x + y), 0), \text{ com } x + y \in \mathbb{R}.$$

Logo, $a + b \in V_1$.

S$_3$) Para qualquer $a \in V_1$, tem-se $a = (0, 2x, 0)$ para algum $x \in \mathbb{R}$. Logo, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha a \in \mathbb{R}^3$ e

$$\alpha a = (0, \alpha(2x), 0) = (0, 2(\alpha x), 0), \text{ com } \alpha x \in \mathbb{R}.$$

Portanto, $\alpha a \in V_1$.

De S$_1$), S$_2$) e S$_3$) conclui-se que V_1 é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Logo, V_t é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ se e só se $t = 1$.

Exercício 3.5

Considere os seguintes subespaços vetoriais do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$:

$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$,
$V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0, y - z = 0\}$,
$V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y = 0, z = 0\}$.

(a) Mostre que

i. $V_2 = \{(b, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : b \in \mathbb{R}\}$.
ii. $V_3 = \{(2a, a, 0) \in \mathbb{R}^3 : a \in \mathbb{R}\}$.

(b) Diga, justificando, se:

i. $(7, 1, -2) \in V_3 + V_2$.
ii. $V_1 \subseteq V_2$, $V_2 \subseteq V_1$, $V_2 \subseteq V_3$, $V_3 \subseteq V_2$.
iii. $V_1 \cap V_3$, $V_2 + V_3$, $V_1 \cup V_2$, $V_2 \cup V_3$ são subespaços vetoriais do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.
iv. $\mathbb{R}^3$ é soma direta de V_1 e V_3.
v. $\mathbb{R}^3$ é soma direta de V_2 e V_3.

Resolução:

(a) i. Tem-se

$$\begin{aligned} V_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y+z=0, y-z=0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y=-z, y=z\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y=z=0\} \\ &= \{(x,0,0) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

(a) ii. Tem-se

$$\begin{aligned} V_3 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-2y=0, z=0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=2y, z=0\} \\ &= \{(2y,y,0) \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

(b) i. Por definição de soma de subespaços vetoriais de um mesmo espaço vetorial V, temos

$$\begin{aligned} V_3+V_2 &= \{u+v : u \in V_3 \text{ e } v \in V_2\} \\ &= \{(b,0,0)+(2a,a,0) : a,b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(2a+b,a,0) : a,b \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Assim, $(7,1,-2) \in V_3+V_2$ se e só se existem $a,b \in \mathbb{R}$ tais que

$$(7,1,-2) = (2a+b,a,0).$$

Claramente, $(7,1,-2) \neq (2a+b,a,0)$, para todos $a,b \in \mathbb{R}$. Logo, $a+b \notin V_3+V_2$.

(b) ii. Temos $(1,1,0) \in V_1$ e $(1,1,0) \notin V_2$. Logo $V_1 \nsubseteq V_2$.

Seja $a=(x,y,z) \in V_2$. Então $(x,y,z)=(b,0,0)$, para algum $b \in \mathbb{R}$, pelo que $z=0$. Logo, $a \in V_1$. Portanto, $V_2 \subseteq V_1$.

Tem-se $(1,0,0) \in V_2$ e $(1,0,0) \notin V_3$, pois $1 \neq 2 \times 0$. Portanto, $V_2 \nsubseteq V_3$.

Tem-se $(2,1,0) \in V_3$ e $(2,1,0) \notin V_3$. Logo $V_3 \nsubseteq V_2$.

(b) iii. A interseção de subespaços vetoriais de um espaço vetorial V é também um subespaço vetorial de V. Logo, como V_1 e V_3 são subespaços vetoriais do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, $V_1 \cap V_3$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

A soma de subespaços vetoriais de um espaço vetorial V é também um subespaço vetorial de V. Logo, como V_2 e V_3 são subespaços vetoriais do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, V_2+V_3 é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

A união de subespaços vetoriais de um espaço vetorial V é um subespaço vetorial de V se e só se um dos subespaços estiver contido no outro. Como $V_2 \subseteq V_1$, então $V_1 \cup V_2$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. Uma vez que $V_3 \nsubseteq V_2$ e $V_2 \nsubseteq V_3$, então $V_2 \cup V_3$ não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

(b) iv. Por definição de soma direta de subespaços, $\mathbb{R}^3$ é soma direta de V_1 e V_3 se e só se $\mathbb{R}^3 = V_1+V_3$ e $V_1 \cap V_3 = \{(0,0,0)\}$. Como $(2,1,0) \in V_1 \cap V_3$ e $(2,1,0) \neq (0,0,0)$, então $\mathbb{R}^3$ não é soma direta de V_1 e V_3.

(b) v. Por definição de soma direta de subespaços, $\mathbb{R}^3$ é soma direta de V_2 e V_3 se e só se $\mathbb{R}^3 = V_2+V_3$ e $V_2 \cap V_3 = \{(0,0,0)\}$. Tem-se $V_2 \cap V_3 = \{(0,0,0)\}$, mas $V_2+V_3 \neq \mathbb{R}^3$, pois existe $(7,1,-2) \in \mathbb{R}^3$ tal que $(7,1,-2) \notin V_2+V_3$. Logo, $\mathbb{R}^3$ não é soma direta de V_2 e V_3.

Exercício 3.6

Verifique se

(a) $(1,-1)$ é combinação linear de $(3,6),(1,2),(2,4)$, no espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$.

(b) $(1,-4,5)$ é combinação linear de $(1,-1,1),(2,1,-2)$, no espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$.

(c) $(3,0,2)$ é combinação linear de $(-1,0,1),(1,0,0),(1,0,1)$, no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

(d) $(0,2,1)$ é combinação linear de $(-1,0,1),(1,0,0),(1,0,1)$, no espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$.

(e) $(1,2,0,3)$ é combinação linear de $(1,-2,0,1),(0,1,-1,1),(0,0,2,1)$, no espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$.

(f) $(1,0,-4,2)$ é combinação linear de $(1,-2,0,1),(0,1,-1,1),(0,0,2,1)$, no espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$.

Resolução:

(a)

$$\begin{array}{ll} & (1,-1) \text{ é combinação linear de } (3,6),(1,2),(2,4) \\ \text{sse} & \exists_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}} \quad (1,-1) = \alpha_1(3,6)+\alpha_2(1,2)+\alpha_3(2,4) \\ \text{sse} & \exists_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}} \quad (1,-1) = (3\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3, 6\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3) \\ \text{sse} & \text{o sistema} \begin{cases} 3\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3 = 1 \\ 6\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3 = -1 \end{cases} \text{ é possível} \end{array}$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada $[A|b]$ do sistema, temos

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 4 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \to l_2 - 2l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

Como $car([A|b]) = 2 \neq 1 = car(A)$, o sistema é impossível. Logo, $(1,-1)$ não é combinação linear de $(3,6),(1,2),(2,4)$.

(b)

$$\begin{array}{ll} & (1,-4,5) \text{ é combinação linear de } (1,-1,1),(2,1,-2) \\ \text{sse} & \exists_{\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}} \quad (1,-4,5) = \alpha_1(1,-1,1)+\alpha_2(2,1,-2) \\ \text{sse} & \exists_{\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}} \quad (1,-4,5) = (\alpha_1+2\alpha_2, -\alpha_1+\alpha_2, \alpha_1-2\alpha_2) \\ \text{sse} & \text{o sistema} \begin{cases} \alpha_1+2\alpha_2 = 1 \\ -\alpha_1+\alpha_2 = -4 \\ \alpha_1-2\alpha_2 = 5 \end{cases} \text{ é possível} \end{array}$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada $[A|b]$ do sistema, temos

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 + l_1 \\ l_3 \to l_3 - l_1}]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -4 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to l_3 + \frac{4}{3}l_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [U|c]$$

Como $car([A|b]) = 2 = car(A)$, o sistema é possível. Logo, $(1,-4,5)$ é combinação linear de $(1,-1,1),(2,1,-2)$. O sistema representado por $[U|C]$ é o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1+2\alpha_2 = 1 \\ 3\alpha_2 = -3 \end{cases}$$

e é equivalente ao sistema inicial. Deste último sistema obtem-se

$$\begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = -1 \end{cases}$$

Assim, $(1,-4,5) = 3(1,-1,1) - (2,1,-2)$.

(c)

$$
\begin{array}{ll}
 & (3,0,2) \text{ é combinação linear de } (-1,0,1),(1,0,0),(1,0,1) \\
\text{sse} & \exists_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}} \quad (3,0,2)=\alpha_1(-1,0,1)+\alpha_2(1,0,0)+\alpha_3(1,0,1) \\
\text{sse} & \exists_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}} \quad (3,0,2)=(-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,0,\alpha_1+\alpha_3) \\
\text{sse} & \text{o sistema} \left\{ \begin{array}{l} -\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=3 \\ 0=0 \\ \alpha_1+\alpha_3=2 \end{array} \right. \quad \text{é possível} \\
\text{sse} & \text{o sistema} \left\{ \begin{array}{l} -\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=3 \\ \alpha_1+\alpha_3=2 \end{array} \right. \quad \text{é possível}
\end{array}
$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada $[A|b]$ do sistema, temos

$$
[A|b]=\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2\to l_2+l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right]=[U|c]
$$

Como $car([A|b])=2=car(A)$, o sistema é possível. O sistema correspondente à matriz $[U|c]$ é

$$
\left\{ \begin{array}{l} -\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=3 \\ \alpha_2+2\alpha_3=5 \end{array} \right.
$$

e é equivalente ao sistema inicial. Do sistema anterior obtem-se

$$
\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1=2-\alpha_3 \\ \alpha_2=5-2\alpha_3 \end{array} \right.
$$

Considerando, por exemplo, $\alpha_3=0$, tem-se $\alpha_1=2$ e $\alpha_2=5$. Assim,

$$
(3,0,2)=2(-1,0,1)+5(1,0,0)+0(1,0,1).
$$

(d)

$$
\begin{array}{ll}
 & (0,2,1) \text{ é combinação linear de } (-1,0,1),(1,0,0),(1,0,1) \\
\text{sse} & \exists_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}} \quad (0,2,1)=\alpha_1(-1,0,1)+\alpha_2(1,0,0)+\alpha_3(1,0,1) \\
\text{sse} & \exists_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}} \quad (0,2,1)=(-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,0,\alpha_1+\alpha_3) \\
\text{sse} & \text{o sistema} \left\{ \begin{array}{l} -\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0 \\ 0=2 \\ \alpha_1+\alpha_3=1 \end{array} \right. \quad \text{é possível}
\end{array}
$$

Claramente, o sistema anterior é impossível. Logo, $(0,2,1)$ não é combinação linear de $(-1,0,1),(1,0,0),(1,0,1)$.

(e)

$$
\begin{array}{ll}
 & (1,2,0,3) \text{ é combinação linear de } (1,-2,0,1),(0,1,-1,1),(0,0,2,1) \\
\text{sse} & \exists_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}} \quad (1,2,0,3)=\alpha_1(1,-2,0,1)+\alpha_2(0,1,-1,1)+\alpha_3(0,0,2,1) \\
\text{sse} & \exists_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}} \quad (1,2,0,3)=(\alpha_1,-2\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) \\
\text{sse} & \text{o sistema} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1=1 \\ -2\alpha_1+\alpha_2=2 \\ -\alpha_2+2\alpha_3=0 \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=3 \end{array} \right. \quad \text{é possível}
\end{array}
$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada $[A|b]$ do sistema, temos

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 + 2l_1 \\ l_4 \to l_4 - l_1}]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_3 \to l_3 + l_2 \\ l_4 \to l_4 - l_2}]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_4 \to l_4 - \frac{1}{2}l_3]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right] = [U|c]$$

Como $car([A|b]) = 4 \neq 3 = car(A)$, o sistema é impossível. Logo, $(1,2,0,3)$ não é combinação linear de $(1,-2,0,1),(0,1,-1,1),(0,0,2,1)$

(f)

$$\begin{array}{ll} & (1,0,-4,2) \text{ é combinação linear de } (1,-2,0,1),(0,1,-1,1),(0,0,2,1) \\ \text{sse} & \exists_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}} \quad (1,0,-4,2) = \alpha_1(1,-2,0,1) + \alpha_2(0,1,-1,1) + \alpha_3(0,0,2,1) \\ \text{sse} & \exists_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}} \quad (1,0,-4,2) = (\alpha_1, -2\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \\ \text{sse} & \text{o sistema } \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_2 + 2\alpha_3 = -4 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2 \end{cases} \text{ é possível} \end{array}$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada $[A|b]$ do sistema, temos

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 + 2l_1 \\ l_4 \to l_4 - l_1}]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_3 \to l_3 + l_2 \\ l_4 \to l_4 - l_2}]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_4 \to l_4 - \frac{1}{2}l_3]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [U|c]$$

Como $car(A) = 3 = car([A|b])$ o sistema é possível. O sistema correspondente à matriz $[U|c]$ é

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 2 \\ 2\alpha_3 = -2 \end{cases}$$

e é equivalente ao sistema inicial. Do sistema anterior obtem-se

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 2 \\ \alpha_3 = -1 \end{cases}$$

Assim, $(1,0,-4,2) = 1(1,-2,0,1) + 2(0,1,-1,1) + (-1)(0,0,2,1)$.

Exercício 3.7

Em cada um dos espaços vetoriais V a seguir indicados, determine o subespaço vetorial de V gerado por S.

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(1,1,1)\}$.

(b) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(0,0,0)\}$.

(c) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

(d) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(1,2,3),(-2,-4,-6),(4,8,12)\}$.

(e) $V = \mathbb{R}^4$, $S = \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,1,1)\}$.

(f) $V = \mathbb{R}^4$, $S = \{(2,1,0,0),(2,0,2,0),(3,1,1,0)\}$.

Resolução:

(a) Dados um espaço vetorial V e um suconjunto S de V, o subespaço vetorial gerado por S é o espaço formado por todas as combinações lineares de elementos de S. Assim, temos

$$< (1,1,1) >= \{x(1,1,1) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \in \mathbb{R}\}.$$

Logo, dado $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{array}{lll} (a,b,c) \in < (1,1,1) > & \text{sse} & \text{existe } x \in \mathbb{R} \text{ tal que } (a,b,c) = x(1,1,1) \\ & \text{sse} & \text{o sistema } \left\{ \begin{array}{l} x = a \\ x = b \\ x = c \end{array} \right. \text{ é possível.} \end{array}$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada $[A|u]$ do sistema, temos

$$[A|u] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & a \\ 1 & b \\ 1 & c \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to l_3 - l_1]{l_2 \to l_2 - l_1} \left[\begin{array}{c|r} 1 & a \\ 0 & b-a \\ 0 & c-a \end{array}\right].$$

O sistema é possível sse $car(A) = car([A|u])$. Por conseguinte, o sistema é possível sse $b-a=0$ e $c-a=0$. Assim,

$$< (1,1,1) >= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, b-a=0 \text{ e } c-a=0\}.$$

(b) Dados um espaço vetorial V e um suconjunto S de V, o subespaço vetorial gerado por S é o espaço formado por todas as combinações lineares de elementos de S. Assim, temos

$$< (0,0,0) >= \{x(0,0,0) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \in \mathbb{R}\} = \{(0,0,0)\}.$$

(c) Dados um espaço vetorial V e um suconjunto S de V, o subespaço vetorial gerado por S é o espaço formado por todas as combinações lineares de elementos de S. Assim, temos

$$\begin{array}{rcl} < (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) > & = & \{x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ & = & \mathbb{R}^3. \end{array}$$

(d) Dados um espaço vetorial V e um suconjunto S de V, o subespaço vetorial gerado por S é o espaço formado por todas as combinações lineares de elementos de S. Assim, temos

$$\begin{array}{ll} < (1,2,3),(-2,-4,-6),(4,8,12) > & \\ =< (1,2,3),(-2,-4,-6 > & (\text{pois } (4,8,12) = 4.(1,2,3)) \\ =< (1,2,3) > & (\text{pois } (-2,-4,-6) = -2.(1,2,3)) \\ = \{x(1,2,3) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\} & \\ = \{(x,2x,3x) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\} & \end{array}$$

Logo, dado $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$,

$(a,b,c) \in < (1,2,3) >$

sse existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $(a,b,c) = x(1,2,3)$

sse existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $(a,b,c) = (x,2x,3x)$

sse o sistema $\begin{cases} x = a \\ 2x = b \\ 3x = c \end{cases}$ é possível.

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada $[A|u]$ do sistema, temos

$$[A|u] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & a \\ 2 & b \\ 3 & c \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - 2l_1 \\ l_2 \to l_2 - 3l_1}]{} \left[\begin{array}{c|c} 1 & a \\ 0 & b-2a \\ 0 & c-3a \end{array}\right].$$

O sistema é possível sse $car(A) = car([A|u])$. Por conseguinte, o sistema é possível sse $b-2a = 0$ e $c-3a = 0$. Assim,

$$< (1,2,3), (-2,-4,-6), (4,8,12) >= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, b-2a = 0 \text{ e } c-3a = 0\}.$$

(e) Dado $(a_1,a_2,a_3,a_4) \in \mathbb{R}^4$, tem-se $(a_1,a_2,a_3,a_4) \in < S >$ se e só se existem $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tais que

$$a(1,0,0,0) + b(1,1,0,0) + c(0,0,1,0) + d(0,0,1,1) = (a_1,a_2,a_3,a_4);$$

i.e., se e só se o sistema seguinte é possível

$$\begin{cases} a + b = a_1 \\ b = a_2 \\ c + d = a_3 \\ d = a_4 \end{cases}$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss-Jordan à matriz ampliada do sistema, tem-se

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{l_1 \leftarrow l_1 - l_2 \\ l_3 \leftarrow l_3 - l_4}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & a_1 - a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a_3 - a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{array}\right]$$

O sistema anterior é possível, para quaisquer $a_1,a_2,a_3,a_4 \in \mathbb{R}$. Assim, $\langle S \rangle = \mathbb{R}^4$.

(f) Dado $(a_1,a_2,a_3,a_4) \in \mathbb{R}^4$, tem-se $(a_1,a_2,a_3,a_4) \in < S >$ se e só se existem $a,b,c \in \mathbb{R}$ tais que

$$a(2,1,0,0) + b(2,0,2,0) + c(3,1,1,0) = (a_1,a_2,a_3,a_4);$$

i.e., se e só se o sistema seguinte é possível

$$\begin{cases} 2a + 2b + 3c = a_1 \\ a + c = a_2 \\ 2b + c = a_3 \\ 0 = a_4 \end{cases}$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss-Jordan à matriz ampliada do sistema, tem-se

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & a_1 \\ 1 & 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 2 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{array}\right] \xrightarrow{L1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{a_1}{2} \\ 1 & 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 2 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{array}\right] \xrightarrow{L2 \leftarrow L_2 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{a_1}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & a_2 - \frac{a_1}{2} \\ 0 & 2 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{L3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\ L_1 \leftarrow L_1 + L_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_2 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & a_2 + a_1 \\ 0 & 0 & 0 & -a_1 + 2a_2 + a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{array}\right] \xrightarrow{L2 \leftarrow -L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -a_2 - a_1 \\ 0 & 0 & 0 & -a_1 + 2a_2 + a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{array}\right]$$

O sistema anterior é possível se e só se $-a_1 + 2a_2 + a_3 = 0$ e $a_4 = 0$. Assim,

$$< S >= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid -a + 2b + c = 0, d = 0\}.$$

Exercício 3.8

Considere o espaço vetorial complexo $\mathbb{R}^3$. Mostre que

(a) $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$.

(b) $\{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$.

(c) $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ não é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$.

Resolução:

(a) O conjunto $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ é gerador de $\mathbb{R}^3$ se

$$< (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0) >= \mathbb{R}^3.$$

Representemos por S o subespaço $< (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0) >$. Uma vez que $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$ são elementos de $\mathbb{R}^3$, é imediato que $S \subseteq \mathbb{R}^3$, pois S é o menor subespaço de $\mathbb{R}^3$ que contem $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$. Assim, resta provar que $\mathbb{R}^3 \subseteq S$.

Dado $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, tem-se

$(a, b, c) \in < (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0) >$

sse existem $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que $(a, b, c) = x(1, 1, 1) + y(1, 1, 0) + z(1, 0, 0)$

sse existem $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que $(a, b, c) = (x + y + z, x + y, x)$

sse o sistema $\begin{cases} x + y + z = a \\ x + y + 0z = b \\ x + 0y + 0z = c \end{cases}$ é possível.

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada $[A|u]$ do sistema, temos

$$[A|u] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 & c \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to l_3 - l_1]{l_2 \to l_2 - l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -1 & b-a \\ 0 & -1 & -1 & c-a \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -1 & c-a \\ 0 & 0 & -1 & b-a \end{array}\right].$$

O sistema é possível sse $car(A) = car([A|u])$. Neste caso, tem-se $car(A) = car([A|u])$, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$; logo o sistema é sempre possível Assim, para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, tem-se $(a, b, c) \in S$. Logo, $\mathbb{R}^3 \subseteq S$.

Provámos que $S = \mathbb{R}^3$ e, portanto, o conjunto $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ é gerador de $\mathbb{R}^3$.

(b) O conjunto $\{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$ é gerador de $\mathbb{R}^3$ se

$$< (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1) >= \mathbb{R}^3.$$

Representemos por S o subespaço $< (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1) >$. Uma vez que $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$ são elementos de $\mathbb{R}^3$, então é imediato que $S \subseteq \mathbb{R}^3$, pois S é o menor subespaço de $\mathbb{R}^3$ que contem $\{1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$. Assim, resta provar que $\mathbb{R}^3 \subseteq S$.

Dado $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, tem-se

$(a, b, c) \in < (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1) >$

sse existem $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ tais que $(a, b, c) = x(1, 0, 1) + y(1, 1, 0) + z(0, 1, 1) + w(1, 1, 1)$

sse existem $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ tais que $(a, b, c) = (x + y + w, y + z + w, x + z + w)$

sse o sistema $\begin{cases} x + y + 0z + w = a \\ 0x + y + z + w = b \\ x + 0y + z + w = c \end{cases}$ é possível.

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada $[A|u]$ do sistema, temos

$$[A|u] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 & 1 & c \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to l_3 - l_1]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & -1 & 1 & 0 & c-a \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to l_3 + l_2]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 & 1 & c-a+b \end{array}\right].$$

O sistema é possível sse $car(A) = car([A|u])$. Neste caso, tem-se $car(A) = car([A|u])$, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$; logo o sistema é sempre possível. Assim, para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, tem-se $(a, b, c) \in S$ e, portanto, $\mathbb{R}^3 \subseteq S$.

Provámos que $S = \mathbb{R}^3$, ou seja, mostrámos que o conjunto $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ é gerador de $\mathbb{R}^3$.

(c) O conjunto $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é gerador de $\mathbb{R}^3$ se

$$< (1, 1, 0), (0, 0, 1) >= \mathbb{R}^3.$$

Tem-se

$$\begin{aligned} < (1, 1, 0), (0, 0, 1) > &= \{x(1, 1, 0) + y(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, x, y) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Como $(1, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$ e $(1, 2, 1) \notin \{(x, x, y) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$, então

$$< (1, 1, 0), (0, 0, 1) >\neq \mathbb{R}^3.$$

Logo, $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ não é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 3.9

Determine dois conjuntos distintos de geradores de cada um dos seguintes subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^4$:

(a) $\mathbb{R}^4$.

(b) $\{(a, c - a, c, 2c) \in \mathbb{R}^4 \,|\, a, c \in \mathbb{R}\}$.

(c) $\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \,|\, a + c = 0, 2b + d + c = 0\}$.

Resolução:

(a) O conjunto $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)(0, 0, 0, 1)\}$ é gerador de $\mathbb{R}^4$, pois

$$\begin{aligned} &< (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)(0, 0, 0, 1) > \\ &= \{x(1, 0, 0, 0) + y(0, 1, 0, 0) + z(0, 0, 1, 0) + w(0, 0, 0, 1) \,|\, x, y, z, w \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R} \,|\, x, y, z, w \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R}^4. \end{aligned}$$

Seja $v = (1, 2, 0, 4)$. Como

$$v = 1(1, 0, 0, 0) + 2(0, 1, 0, 0) + 0(0, 0, 1, 0) + 4(0, 0, 0, 1)$$

e a coordenada em v relativa a $(0, 0, 0, 1)$ é diferente de zero, então

$$\begin{aligned} & < (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) > \\ = & < (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 2, 0, 4) > . \end{aligned}$$

Logo, $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 2, 0, 4)\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^4$.

(b) Seja $S = \{(a, c - a, c, 2c) \in \mathbb{R}^4 \,|\, a, c \in \mathbb{R}\}$. Tem-se

$$\begin{aligned} \{(a, c - a, c, 2c) \in \mathbb{R}^4 \,|\, a, c \in \mathbb{R}\} &= \{a(1, -1, 0, 0) + c(0, 1, 1, 2) \,|\, a, c \in \mathbb{R}\} \\ &= < (1, -1, 0, 0), (0, 1, 1, 2) > . \end{aligned}$$

Logo, $\{(1,-1,0,0),(0,1,1,2)\}$ é um conjunto gerador de S.

Seja $v=(2,-1,1,2)$. Como
$$v = 2(1,-1,0,0)+1(0,1,1,2)$$
e a coordenada em v relativa a $(1,-1,0,0)$ é diferente de zero, então
$$<(1,-1,0,0),(0,1,1,2)>=<(2,-1,1,2),(0,1,1,2)> .$$
Assim, $\{(2,-1,1,2),(0,1,1,2)\}$ também é um conjunto gerador de S.

(c) Seja $S=\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 : a+c=0, 2b+d+c=0\}$. Tem-se
$$\begin{aligned}&\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 : a+c=0, 2b+d+c=0\}\\ &=\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 : a=-c, d=-c-2b\}\\ &=\{(-c,b,c,-c-2b)\in\mathbb{R}^4 : a=-c, d=-c-2b\}\\ &=\{b(0,1,0,-2)+c(-1,0,1,-1) : b,c\in\mathbb{R}\}\\ &=<(0,1,0,-2),(-1,0,1,-1)> .\end{aligned}$$
Logo, $\{(0,1,0,-2),(-1,0,1,-1)\}$ é um conjunto gerador de S.

Seja $v=(-3,2,3,-7)$. Como
$$v=2(0,1,0,-2)+3(-1,0,1,-1)$$
e a coordenada em v relativa a $(-1,0,1,-1)$ é diferente de zero, então
$$<(0,1,0,-2),(-1,0,1,-1)>=<(0,1,0,-2),(-3,2,3,-7)> .$$
Assim, $\{(0,1,0,-2),(-3,2,3,-7)\}$ também é um conjunto gerador de S.

Exercício 3.10

Seja $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=2y\}$.

(a) Indique vetores $u,v\in\mathbb{R}^3$ tais que $u\in F$ e $v\notin F$.

(b) Mostre que F é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ indicando um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$.

(c) Diga, justificando, se $F=<(6,3,0),(-2,-1,5),(0,0,3)>$.

Resolução:

(a) Seja $u=(x_1,x_2,x_3)=(2,1,0)$. Como $u\in\mathbb{R}^3$ e $x_1=2=2\times 1=2x_2$, então $u\in F$.

Seja $v=(y_1,y_2,y_3)=(1,1,0)$. Uma vez que $y_1\neq 2y_2$, então $v\notin F$.

(b) Considerando que
$$\begin{aligned}F &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=2y\}\\ &= \{(2y,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y,z\in\mathbb{R}\}\\ &= \{y(2,1,0)+z(0,0,1)\in\mathbb{R}^3 : y,z\in\mathbb{R}\}\\ &= <(2,1,0),(0,0,1)>,\end{aligned}$$
então F é o menor subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ que contem $\{(2,1,0),(0,0,1)\}$ e $\{(2,1,0),(0,0,1)\}$ é um conjunto gerador de F.

Resolução alternativa:

Comecemos por provar que F é um subespaço de $\mathbb{R}^3$. Por definição de F, tem-se $F\subseteq\mathbb{R}^3$. Além disso, veirifca-se o seguinte:

(1) $F\neq\emptyset$, uma vez que $(0,0,0)\in F$.

(2) Para quaisquer $a = (x_1, x_2, x_3), b = (y_1, y_2, y_3) \in F$, tem-se $a, b \in \mathbb{R}^3$ e $x_1 = 2x_2$ e $y_1 = 2y_2$.
Como $a, b \in \mathbb{R}^3$, segue que $a + b = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in \mathbb{R}^3$. Também se tem

$$x_1 + y_1 = 2x_2 + 2y_2 = 2(x_2 + y_2)$$

e, portanto, $a + b \in F$.

(3) Para quaisquer $a = (x_1, x_2, x_3) \in F$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se $a \in \mathbb{R}^3$ e $x_1 = 2x_2$.

Como $a \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, segue que $\alpha a = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) \in \mathbb{R}^3$. Também se tem

$$\alpha x_1 = \alpha(2x_2) = 2(\alpha x_2).$$

Portanto, $\alpha a \in F$.

De (1),(2),(3),(4) conclui-se que F é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$.

Determinemos um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$.

Considerando que

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y\} \\ &= \{(2y, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(2, 1, 0) + z(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= < (2, 1, 0), (0, 0, 1) >, \end{aligned}$$

então $\{(2, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é um conjunto gerador de F.

(c) Da alínea anterior, temos

$$F =< (2, 1, 0), (0, 0, 1) > .$$

Uma vez que $(-2, -1, 5) = -(2, 1, 0) + 5(0, 0, 1)$, segue que

$$F =< (2, 1, 0), (0, 0, 1), (-2, -1, 5) > .$$

Como $(6, 3, 0) = 3(2, 1, 0) + 0(0, 0, 1) + 0(-2, -1, 5)$ e a coordenada relativa a $(2, 1, 0)$ é não nula, então

$$F =< (6, 3, 0), (0, 0, 1), (-2, -1, 5) > .$$

Considerando que $(0, 0, 3) = 0(6, 3, 0) + 3(0, 0, 1) + 0(-2, -1, 5)$ e a coordenada relativa a $(0, 0, 1)$ é não nula, temos

$$F =< (6, 3, 0), (0, 0, 3), (-2, -1, 5) > .$$

Resolução alternativa 1:

Seja $S =< (6, 3, 0), (-2, -1, 5), (0, 0, 3) >$. Como $(6, 3, 0)$, $(2, -1, 5)$ e $(0, 0, 3)$ são elementos de F e S é o menor subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ que contem $\{(6, 3, 0), (-2, -1, 5), (0, 0, 3)\}$, então $S \subseteq F$. Assim, resta provar que $F \subseteq S$. Ora, considerando que $(2, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ são elementos de S, pois

$$\begin{aligned} (2, 1, 0) &= \tfrac{1}{3}(6, 3, 0) + 0(-2, -1, 5) + 0(0, 0, 3), \\ (0, 0, 1) &= 0(6, 3, 0) + 0(-2, -1, 5) + \tfrac{1}{3}(0, 0, 3), \end{aligned}$$

e $F =< (2, 1, 0), (0, 0, 1) >$ é o menor subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ que contem $\{(2, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, concluímos que $F \subseteq S$.

Portanto, $F =< (6, 3, 0), (-2, -1, 5), (0, 0, 3) >$.

Resolução alternativa 2:

Seja $S =< (6, 3, 0), (-2, -1, 5), (0, 0, 3) >$. Como $(6, 3, 0)$, $(2, -1, 5)$ e $(0, 0, 3)$ são elementos de F e S é o menor subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ que contem $\{(6, 3, 0), (-2, -1, 5), (0, 0, 3)\}$, então $S \subseteq F$.

Resta provar que $F \subseteq S$. Dado $(x,y,z) \in F$, tem-se $(x,y,z) = (2a,a,c)$ para alguns $a,c \in \mathbb{R}$. Por outro lado, dado $(2a,a,c) \in F$,

$(2a,a,c) \in <(6,3,0),(-2,-1,5),(0,0,3)>$

sse existem $x,y,z \in \mathbb{R}$, $(2a,a,c) = x(6,3,0) + y(-2,-1,5) + z(0,0,3)$

sse existem $x,y,z \in \mathbb{R}$, $(2a,a,c) = (6x-2y, 3x-y, 5y+3z)$

sse o sistema $\begin{cases} 6x-2y+0z=2a \\ 3x-y+0z=a \\ 0x+5y+3z=c \end{cases}$ é possível.

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada $[A|b]$ do sistema tem-se

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -2 & 0 & 2a \\ 3 & -1 & 0 & a \\ 0 & 5 & 3 & c \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \to l_2 - \frac{1}{2}l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -2 & 0 & 2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & c \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -2 & 0 & 2a \\ 0 & 5 & 3 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

O sistema é possível sse $car(A) = car([A|b])$. Neste caso, tem-se $car(A) = car([A|b])$, para quaisquer $a,c \in \mathbb{R}$; logo o sistema é sempre possível. Assim, para qualquer $(2a,a,c) \in F$, tem-se $(2a,a,c) \in S$ e, portanto, $F \subseteq S$.

Logo, $S = F$.

Exercício 3.11

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e u_1, u_2, u_3 vetores do espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$. Justifique que:

(a) $<u_1,u_2,u_3> = <u_1, u_1+u_2, u_1+u_2+u_3>$.

(b) $<u_1,u_2,u_3> = <-u_3, -u_1+u_2, 2u_2+u_3>$.

Resolução:

(a) Seja $v = u_1+u_2+u_3$. Uma vez que em v a coordenada respeitante a u_3 é não nula, tem-se

$$<u_1,u_2,u_3> = <u_1,u_2,v>.$$

Consideremos, agora, $w = u_1+u_2$. Atendendo a que $w = u_1+u_2+0v$ e em w a coordenada respeitante a u_2 é não nula, tem-se

$$<u_1,u_2,v> = <u_1,w,v>.$$

Logo, $<u_1,u_2,u_3> = <u_1, u_1+u_2, u_1+u_2+u_3>$.

Resolução alternativa:

No sentido de provar a igualdade $<u_1,u_2,u_3> = <u_1, u_1+u_2, u_1+u_2+u_3>$, vamos mostrar que

$$<u_1,u_2,u_3> \subseteq <u_1, u_1+u_2, u_1+u_2+u_3>$$

e

$$<u_1, u_1+u_2, u_1+u_2+u_3> \subseteq <u_1,u_2,u_3>.$$

Considerando que

- $u_1 = 1u_1 + 0(u_1+1_2) + 0(u_1+u_2+u_3)$,
- $u_2 = (-1)u_1 + 1(u_1+u_2) + 0(u_1+u_2+u_3)$,
- $u_3 = 0u_1 + (-1)(u_1+u_2) + 1(u_1+u_2+u_3)$,

tem-se $u_1, u_2, u_3 \in < u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3 >$. Logo, como $< u_1, u_2, u_3 >$ é o menor subespaço de V que contem $\{u_1, u_2, u_3\}$ segue que

$$< u_1, u_2, u_3 > \subseteq < u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3 > .$$

Por outro lado, como

- $u_1 = 1u_1 + 0u_2 + 0u_3, \quad u_1 + u_2 = 1u_1 + 1u_2 + 0u_3, \quad u_1 + u_2 + u_3 = 1u_1 + 1u_2 + 1u_3,$

tem-se $u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3 \in < u_1, u_2, u_3 >$. Então, considerando que

$$< u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3 >$$

é o menor subespaço de V que contem $\{u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3\}$, segue que

$$< u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3 > \subseteq < u_1, u_2, u_3 > .$$

Logo, $< u_1, u_2, u_3 > = < u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3 >$.

(b) Claramente,

$$< u_1, u_2, u_3 > = < u_3, u_1, u_2 > .$$

Seja $v = u_3 + 2u_2 = u_3 + 0u_1 + 2u_2$. Como em v a coordenada respeitante a u_2 é não nula, então

$$< u_3, u_1, u_2 > = < u_3, u_1, v > .$$

Considerando que $w = -u_1 + u_2 = (-\frac{1}{2})u_3 + (-1)u_1 + \frac{1}{2}v$ e a coordenada respeitante a u_1 é não nula, temos

$$< u_3, u_1, v > = < u_3, w, v > .$$

Uma vez que $t = -u_3 = (-1)u_3 + 0w + 0v$ e a coordenada de u_3 em t é não nula, segue que

$$< u_3, w, v > = < t, w, v > .$$

Logo, $< u_1, u_2, u_3 > = < -u_3, -u_1 + u_2, 2u_2 + u_3 >$.

Exercício 3.12

No espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$, sejam $v_1 = (1, 0, 0, -1)$, $v_2 = (1, -2, 0, 1)$, $v_3 = (0, 1, 0, -1)$ e $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Indique, caso exista:

(a) um conjunto gerador de W que tenha exatamente 4 vetores.

(b) um conjunto $\{w_1, w_2, w_3\}$ que gere W e tal que $w_j \neq v_1$, $\forall\, j \in \{1, 2, 3\}$.

(c) um conjunto gerador de W que tenha exatamente 2 vetores.

Resolução:

(a) Seja $v = v_1 + v_2 + v_3$. Então $v \notin \{v_1, v_2, v_3\}$ e tem-se

$$< v_1, v_2, v_3 > = < v_1, v_2, v_3, v > .$$

Logo, $\{v_1, v_2, v_3, v\}$ é um conjunto gerador de W com 4 vetores distintos.

(b) Seja $v = v_1 + v_2 + v_3$. Então $v \neq v_1$. Como a coordenada de v_1 em v é não nula, tem-se

$$< v_1, v_2, v_3 > = < v, v_2, v_3 > .$$

Logo, $\{v, v_2, v_3\}$ é um conjunto gerador de W nas condições indicadas.

(c) Como $v_2 = v_1 - 2v_3$, então

$$< v_1, v_2, v_3 > = < v_1, v_3 > .$$

Logo, $\{v_1, v_3\}$ é um conjunto gerador de W com 2 vetores distintos.

Exercício 3.13

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$. Mostre que; Mostre que:

(a) Se $X \subseteq Y$, então $\langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$.

(b) $\langle X \cup Y \rangle = \langle X \rangle + \langle Y \rangle$.

Resolução:

(a) Admitamos que $X \subseteq Y$. Então, como $Y \subseteq < Y >$, segue que $X \subseteq < Y >$. Assim, considerando que $< X >$ é o menor subespaço de V que contém X, conclui-se que $< X > \subseteq < Y >$.

(b) Tem-se $X \subseteq < X > + < Y >$ e $Y \subseteq < X > + < Y >$. Logo, $X \cup Y \subseteq < X > + < Y >$. Considerando que $< X \cup Y >$ é o menor subespaço de V que contém $X \cup Y$, então $< X \cup Y > \subseteq < X > + < Y >$.
Mostremos, agora, que $< X > + < Y > \subseteq < X \cup Y >$. Atendendo a que $X \subseteq X \cup Y$ e $X \cup Y \subseteq < X \cup Y >$, conclui-se que $< X > \subseteq < X \cup Y >$, pois $< X >$ é o menor supespaço de V que contém X. De modo análogo prova-se que $< Y > \subseteq < X \cup Y >$. Então, dado $v \in < X > + < Y >$, resulta que $v \in < X \cup Y >$. De facto, se $v \in < X > + < Y >$, tem-se $v = a + b$ com $a \in < X >$ e $b \in < Y >$. Consequentemente $a, b \in < X \cup Y >$, donde segue que $a + b \in < X \cup Y >$, pois $< X \cup Y >$ é um subespaço de V e, portanto, fechado para a adição. Portanto, $< X > + < Y > \subseteq < X \cup Y >$.

Exercício 3.14

Diga se são linearmente independentes as sequências de vetores a seguir indicadas:

(a) $((1, 0), (1, 1))$ em $\mathbb{R}^2$.

(b) $((1, 0), (1, 1), (0, -1))$ em $\mathbb{R}^2$.

(c) $((2, 0, 1), (0, 0, -1), (-1, 1, 2))$ no espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$.

(d) $((1, 2, 3), (-1, 1, 1), (2, 0, 1), (0, 2, 1))$ no espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$.

(e) $((0, 1, 1, 0), (-1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, -1))$ no espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$.

(f) $((1, 1, 1, 0), (2, 0, 2, 3), (-1, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 2))$ no espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$.

Resolução:

(a) A sequência de vetores $((1, 0), (1, 1))$ é linearmente independente sse, para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1(1, 0) + \alpha_2(1, 1) = (0, 0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

sse o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

é determinado (note-se que o sistema é homogéneo, pelo que é possível). Resolvendo o sistema, obtem-se $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e, portanto, a sequência de vetores é linearmente independente.

(b) A sequência de vetores $((1, 0), (1, 1), (0, -1))$ é linearmente independente sse, para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1(1, 0) + \alpha_2(1, 1) + \alpha_3(0, -1) = (0, 0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

sse o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

é determinado (note-se que o sistema é homogéneo, pelo que é possível). Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz simples do sistema, tem-se

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Como $A \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ e $car(A) = 2 <$ n$^{\underline{\text{o}}}$ incógnitas, o sistema é indeterminado. Logo, a sequência $((1,0),(1,1),(0,-1))$ é linearmente dependente. Por exemplo, considerando $\alpha_2 = 1$, temos $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_3 = 1$. Logo,

$$-1(1,0) + 1(1,1) + 1(0,-1) = (0,0),$$

donde se obtem

$$(1,1) = 1(1,0) - 1(0,-1).$$

(c) A sequência de vetores $((2,0,1),(0,0,-1),(-1,1,2))$ é linearmente independente sse, para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1(2,0,1) + \alpha_2(0,0,-1) + \alpha_3(-1,1,2) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

sse o sistema

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

é determinado (note-se que o sistema é homogéneo, pelo que é possível). Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz simples do sistema, tem-se

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3 - \frac{1}{2}l_1]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como $A \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ e $car(A) = 3 =$ n$^{\underline{\text{o}}}$ incógnitas, o sistema é determinado. Logo, a sequência

$$((2,0,1),(0,0,-1),(-1,1,2))$$

é linearmente independente.

(d) A sequência de vetores $((1,2,3),(-1,1,1),(2,0,1),(0,2,1))$ é linearmente independente sse, para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(-1,1,1) + \alpha_3(2,0,1) + \alpha_4(0,2,1) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

sse o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_4 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

é determinado (note-se que o sistema é homogéneo, pelo que é possível). Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz simples do sistema, tem-se

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - 2l_1 \\ l_3 \to l_3 - 3l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -5 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3 - \frac{4}{3}l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} = [U].$$

Como $A \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ e $car(A) = 3 <$ n$^{\underline{\text{o}}}$ incógnitas, o sistema é indeterminado. Logo, a sequência $((2,0,1),(0,0,-1),(-1,1,2))$ é linearmente dependente. O sistema homogéneo com matriz simples U, equivalente ao sistema inicial, é o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_2 - 4\alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \\ \frac{1}{3}\alpha_3 - \frac{5}{3}\alpha_4 = 0 \end{cases},$$

donde se obtem
$$\begin{cases} \alpha_1 = -4\alpha_4 \\ \alpha_2 = 6\alpha_4 \\ \alpha_3 = 5\alpha_4 \end{cases}.$$
Considerando, por exemplo, $\alpha_4 = 1$, obtemos $\alpha_3 = 5$, $\alpha_2 = 6$ e $\alpha_1 = -4$. Logo,
$$-4(1,2,3) + 6(-1,1,1) + 5(2,0,1) + 1(0,2,1) = (0,0,0)$$
pelo que temos
$$(0,2,1) = 4(1,2,3) - 6(-1,1,1) - 5(2,0,1).$$
Observação: Note-se que o sistema indicado é homogéneo e, portanto, é possível. Além disso, para avaliar se o sistema indicado é determinado ou é indeterminado, não seria necessário aplicar o método de Gauss à matriz ampliada do sistema. O sistema indicado é um sistema a 3 equações e 4 incógnitas, pelo que a característica da matriz simples do sistema é no máximo 3. Como $3 <$ n$^{\underline{o}}$ incógnitas , o sistema é indeterminado.

(e) A sequência de vetores $((0,1,1,0),(-1,0,1,1),(1,1,0,-1))$ é linearmente independente sse, para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$,
$$\alpha_1(0,1,1,0) + \alpha_2(-1,0,1,1) + \alpha_3(1,1,0,-1) = (0,0,0,0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$
sse o sistema
$$\begin{cases} -\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases}$$
é determinado (note-se que o sistema é homogéneo, pelo que é possível). Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz simples do sistema, temos
$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \to l_2 - l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[\substack{l_3 \to l_3 - l_2 \\ l_4 \to l_4 + l_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [U].$$
Como $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e $car(A) = 2 <$ n$^{\underline{o}}$ incógnitas, o sistema é indeterminado. Logo, a sequência
$$((0,1,1,0),(-1,0,1,1),(1,1,0,-1))$$
é linearmente dependente. O sistema homogéneo com matriz simples U, equivalente ao sistema inicial, é o sistema
$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases},$$
donde se obtem
$$\begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_3 \\ \alpha_2 = \alpha_3 \end{cases}.$$
Considerando $\alpha_3 = 1$, obtem-se $\alpha_2 = 1$ e $\alpha_1 = -1$. Logo
$$(-1)(0,1,1,0) + 1(-1,0,1,1) + 1(1,1,0,-1) = (0,0,0,0)$$
pelo que se tem, por exemplo,
$$(1,1,0,-1) = 1(0,1,1,0) + (-1)(-1,0,1,1).$$

(f) A sequência de vetores $((1,1,1,0),(2,0,2,3),(-1,1,0,1),(1,1,0,2))$ é linearmente independente sse, para quaisquer $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4 \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1(1,1,1,0)+\alpha_2(2,0,2,3)+\alpha_3(-1,1,0,1)+\alpha_4(1,1,0,2)=(0,0,0,0) \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$$

sse o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4=0 \\ \alpha_1+\alpha_3+\alpha_4=0 \\ \alpha_1+2\alpha_2=0 \\ 3\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4=0 \end{cases}$$

é determinado (note-se que o sistema é homogéneo, pelo que é possível). Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz simples do sistema, tem-se

$$[A]=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2\to l_2-l_1 \\ l_3 \to l_3-l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[l_4\to l_4+\frac{3}{2}l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_4\to l_4-4l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Como $A\in\mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ e $car(A)=4=$ nº incógnitas, o sistema é determinado. Logo a sequência de vetores $((1,1,1,0),(2,0,2,3),(-1,1,0,1),(1,3,0,2))$ é linearmente independente.

Exercício 3.15

Sejam $n\in\mathbb{N}$ e e $v_1,...,v_n,v_{n+1}$ elementos do espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$ tais que a sequência $(v_1,...,v_n)$ é linearmente independente. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes.

(a) $(v_1,...,v_n)$ é uma base de $\mathbb{R}^n$.

(b) A sequência de vetores $(v_1,...,v_{i-1},v_{i+1},...,v_n)$ é linearmente independente.

(c) A sequência de vetores $(v_1,...,v_n,v_{n+1})$ é linearmente dependente.

(d) Para qualquer $\alpha\in\mathbb{K}$, a sequência de vetores $(v_1,...,\alpha v_i,...,v_n)$ é linearmente independente.

(e) Para qualquer $\alpha\in\mathbb{K}$, a sequência de vetores $(v_1,...,v_{i-1},v_i+\alpha v_j,v_{i+1},...,v_n)$, onde $j\neq i$, é linearmente independente.

Resolução:

(a) Num espaço vetorial V de dimensão n, qualquer sequência com n vetores que seja linearmente independente é uma base de V.

Logo, como $\dim\mathbb{R}^n=n$ e $(v_1,\ldots,v_n)$ é uma sequência de n vetores de $\mathbb{R}^n$ linearmente independente, a afirmação é verdadeira.

(b) A afirmação é verdadeira, pois, para quaisquer $\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & \alpha_1v_1+\ldots+\alpha_{i-1}v_{i-1}+\alpha_{i+1}v_{i+1}+\ldots+\alpha_nv_n=0_{\mathbb{R}^n} \\ \Rightarrow\ & \alpha_1v_1+\ldots+\alpha_{i-1}v_{i-1}+0v_i+\alpha_{i+1}v_{i+1}+\ldots+\alpha_nv_n=0_{\mathbb{R}^n} \\ \Rightarrow\ & \alpha_1=...=\alpha_{i-1}=\alpha_{i+1}=...=\alpha_n=0. \quad ((v_1,\ldots,v_n) \text{ é linearmente independente}) \end{aligned}$$

Logo, a sequência de vetores $(v_1,...,v_{i-1},v_{i+1},...,v_n)$ é linearmente independente.

(c) A afirmação é verdadeira, pois num espaço vetorial de dimensão n qualquer sequência com mais do que n vetores é linearmente dependente.

(d) A afirmação é falsa. Se $\alpha = 0$, tem-se $(v_1, ..., \alpha v_i, ..., v_n) = (v_1, \dots, 0_{\mathbb{R}^n}, \dots, v_n)$. Então, considerando que

$$0v_1 + \cdots + 1 \cdot 0_{\mathbb{R}^n} \cdots + 0v_n = 0_{\mathbb{R}^n}, \text{ com } 1 \neq 0,$$

conclui-se que a sequência $(v_1, \dots, 0, \dots, v_n)$ é linearmente dependente.

(e) A afirmação é verdadeira, pois, para quaisquer $\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rl} & \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_j v_j + \ldots + \alpha_i(v_i + \alpha v_j) + \ldots + \alpha_n v_n = 0_{\mathbb{R}^n} \\ \Rightarrow & \alpha_1 v_1 + \ldots + (\alpha_j + \alpha_i \alpha) v_j + \ldots + \alpha_i v_i + \ldots + \alpha_n v_n = 0_{\mathbb{R}^n} \\ \Rightarrow & \alpha_1 = ... = \alpha_j + \alpha_i \alpha = \ldots = \alpha_i = ... = \alpha_n = 0 \quad ((v_1, \dots, v_n) \text{ é linearmente independente}) \\ \Rightarrow & \alpha_1 = ... = \alpha_j = \ldots = \alpha_i = ... = \alpha_n = 0 \end{array}$$

Exercício 3.16

Considere, no espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$, os subespaços

$$\begin{array}{l} U = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 : a_1 - a_4 = 0, a_4 - a_3 = 0\} \\ W_1 = \{(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4 : b_2 + 2b_3 = 0, b_1 + 2b_3 - b_4 = 0\} \\ W_2 =< (1,1,1,0), (-1,1,0,1), (1,3,2,1), (-3,1,-1,2) >. \end{array}$$

(a) Diga, justificando, se $((1,1,1,1), (0,1,0,0), (1,0,0,1))$ é uma base de U.

(b) Determine uma base de: i. W_1. ii. W_2.

Resolução:

(a) Sejam $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (0,1,0,0)$, $u_3 = (1,0,0,1)$.

A sequência (u_1, u_2, u_3) é uma base de U sse $U =< (u_1, u_2, u_3 >$ e (u_1, u_2, u_3) é linearmente independente.

Ora, atendendo a que $u_3 \notin U$, então $U \neq< (u_1, u_2, u_3 >$ e, portanto, (u_1, u_2, u_3) não é uma base de U.

(b) i. Pretendemos determinar vetores $v_1, \dots, v_p$ de $\mathbb{R}^4$ tais que $W_1 =< v_1, \dots, v_p >$ e $(v_1, \dots, v_p)$ é linearmente independente.

Tem-se

$$\begin{array}{rcl} W_1 & = & \{(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4 : b_2 + 2b_3 = 0, b_1 + 2b_3 - b_4 = 0\} \\ & = & \{(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4 : b_2 = -2b_3, b_1 = -2b_3 + b_4\} \\ & = & \{(-2b_3 + b_4, -2b_3, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4 : b_3, b_4 \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{b_3(-2,-2,1,0) + b_4(1,0,0,1) \in \mathbb{R}^4 : b_3, b_4 \in \mathbb{R}\} \\ & = & < (-2,-2,1,0), (1,0,0,1) > . \end{array}$$

Verifiquemos se a sequência $((-2,-2,1,0), (1,0,0,1))$ é linearmente independente. Como, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\alpha(-2,-2,1,0) \neq (1,0,0,1) \text{ e } \beta(1,0,0,1) \neq (-2,-2,1,0),$$

a sequência $((-2,-2,1,0), (1,0,0,1))$ é linearmente independente.

Portanto, $((-2,-2,1,0), (1,0,0,1))$ é uma base de W_1.

(b) ii. Pretendemos determinar vetores $v_1, \dots, v_p$ tais que $W_2 =< v_1, \dots, v_p >$ e $(v_1, \dots, v_p)$ é linearmente independente.

Como $W_2 =< (1,1,1,0), (-1,1,0,1), (1,3,2,1), (-3,1,-1,2) >$, resta verificar se a sequência

$$((1,1,1,0), (-1,1,0,1), (1,3,2,1), (-3,1,-1,2))$$

é linearmente independente.

Sejam $v_1 = (1,1,1,0)$, $v_2 = (-1,1,0,1)$, $v_3 = (1,3,2,1)$, $v_4 = (-3,1,-1,2)$. A sequência (v_1, v_2, v_3, v_4) é linearmente independente sse, para quaisquer α_1, α_2, α_3, $\alpha_4 \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = (0,0,0,0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

sse, para quaisquer α_1, α_2, α_3, $\alpha_4 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}&(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - 3\alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + 2\alpha_3 - \alpha_4, \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4) = (0,0,0,0)\\ &\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0\end{aligned}$$

sse o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - 3\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_3 - \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \end{cases}$$

é determinado (note-se que o sistema é possível, pois é um sistema homogéneo). Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz simples do sistema, temos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - l_1 \\ l_3 \to l_3 - l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_3 \to l_3 - \frac{1}{2}l_2 \\ l_4 \to l_4 - \frac{1}{2}l_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

Uma vez que $car(A) = 2 < 4 = \text{n}^{\text{o}}$ incógnitas, o sistema é interminado. O sistema homogéneo com matriz simples U é o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - 3\alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 4\alpha_4 = 0 \end{cases},$$

donde se obtem

$$\begin{cases} \alpha_1 = -2\alpha_3 + \alpha_4 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 - 2\alpha_4 \end{cases}.$$

Considerando $\alpha_3 = 1$ e $\alpha_4 = 0$, temos $\alpha_1 = -2$ e $\alpha_2 = -1$. Então

$$-2v_1 - v_2 + v_3 + 0v_4 = 0_{\mathbb{R}^4},$$

donde se obtem $v_3 = 2v_1 + v_2 + 0v_4$. Logo, $< v_1, v_2, v_3, v_4 > = < v_1, v_2, v_4 >$.

Verifiquemos, agora, se (v_1, v_2, v_4) é linearmente independente. A sequência (v_1, v_2, v_4) é linearmente independente sse, para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_4 v_4 = (0,0,0,0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = 0$$

sse, para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}&(\alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4, \alpha_1 - \alpha_4, \alpha_2 + 2\alpha_4) = (0,0,0,0)\\ &\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0\end{aligned}$$

sse o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 + 2\alpha_4 = 0 \end{cases}$$

é determinado (note-se que o sistema é possível, pois é um sistema homogéneo). Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz simples do sistema, temos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - l_1 \\ l_3 \to l_3 - l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_3 \to l_3 - \frac{1}{2}l_2 \\ l_4 \to l_4 - \frac{1}{2}l_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

Tem-se $car(A) = 2 < 3 =$ nº incógnitas, logo o sistema é interminado. O sistema homogéneo com matriz simples U é o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_2 + 4\alpha_4 = 0 \end{cases},$$

donde se obtem

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_4 \\ \alpha_2 = -2\alpha_4 \end{cases}.$$

Considerando $\alpha_4 = 1$, temos $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = -2$. Então $u_1 - 2u_2 + u_4 = 0_{\mathbb{R}^4}$, donde se obtem $u_4 = -u_1 + 2u_2$. Logo, $< u_1, u_2, u_4 >=< u_1, u_2 >$.

A sequência (u_1, u_2) é linearmente independente, pois, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u_1 \neq \alpha u_2$ e $u_2 \neq \beta u_1$.

Uma vez que $W_2 =< u_1, u_2 >$ e (u_1, u_2) é linearmente independente, então (u_1, u_2) é uma base de W_2.

Exercício 3.17

Determine uma base de $W \cap U$ e uma base de $W + U$ onde

(a) $W =< (0, 0, -1), (1, 0, 2) >$ e $U =< (0, 1, 1), (-1, 3, 2) >$ são subespaços do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$.

(b) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_4 = 0\}$ e $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$ são subespaços do espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$.

(c) $W = \{(y, 2y - x, x + y, z) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ e $U = \{(\alpha, 3\alpha, 0, -\alpha) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ são subespaços do espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$.

Resolução:

(a) Comecemos por determinar uma base de $W + U$, ou seja, pretendemos determinar vetores $v_1, \ldots, v_p$ tais que $W + U =< v_1, \ldots, v_p >$ e $(v_1, \ldots, v_p)$ é linearmente independente.

Tem-se

$$\begin{aligned} W + U &= < (0, 0, -1), (1, 0, 2) > + < (0, 1, 1), (-1, 3, 2) > \\ &= < (0, 0, -1), (1, 0, 2), (0, 1, 1), (-1, 3, 2) > . \end{aligned}$$

Sejam $v_1 = (0, 0, -1)$, $v_2 = (1, 0, 2)$, $v_3 = (0, 1, 1)$ e $v_4 = (-1, 3, 2)$. Verifiquemos se (v_1, v_2, v_3, v_4) é linearmente independente. Como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, qualquer sequência com mais de 3 vetores de $\mathbb{R}^3$ é linearmente dependente. Logo, (v_1, v_2, v_3, v_4) é linearmente dependente. Uma vez que $v_4 = -1v_1 - 1v_2 + 3v_3$, segue que

$$< v_1, v_2, v_3, v_4 >=< v_1, v_2, v_3 > .$$

Verifiquemos, agora, se (v_1, v_2, v_3) é linearmente independente. A sequência (v_1, v_2, v_3) é linearmente independente sse, para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = (0, 0, 0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

sse, para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$,

$$(\alpha_2, \alpha_3, -\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3) = (0, 0, 0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

sse o sistema

$$\begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

é determinado.

Resolvendo o sistema anterior, obtemos $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Logo, (v_1, v_2, v_3) é linearmente independente.

Como $W + U =< v_1, v_2, v_3 >$ e (v_1, v_2, v_3) é linearmente independente, conclui-se que (v_1, v_2, v_3) é uma base de $W + U$.

Determinamos seguidamente uma base de $W \cap U$. Para tal, comecemos por descrever cada um dos conjuntos em compreensão.

Dado $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, tem-se

$$\begin{array}{rcl} (a,b,c) \in W & \Leftrightarrow & \exists_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}}\ (a,b,c) = \alpha v_1 + \beta v_2 \\ & \Leftrightarrow & \exists_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}}\ (a,b,c) = (\beta, 0, -\alpha + 2\beta) \\ & \Leftrightarrow & \text{o sistema} \begin{cases} \beta = a \\ 0 = b \\ -\alpha + 2\beta = c \end{cases} \text{é possível.} \end{array}$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada do sistema, temos

$$\left[\begin{array}{rr|c} 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & b \\ -1 & 2 & c \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_3]{} \left[\begin{array}{rr|c} -1 & 2 & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \left[\begin{array}{rr|c} -1 & 2 & c \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & b \end{array}\right].$$

O sistema é possível se e só se $car(A) = car([A|b])$. Logo, o sistema é possível se e só se $b = 0$.

Assim, $W = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid b = 0\}$.

Dado $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, tem-se

$$\begin{array}{rcl} (a,b,c) \in U & \Leftrightarrow & \exists_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}}\ (a,b,c) = \alpha v_3 + \beta v_4 \\ & \Leftrightarrow & \exists_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}}\ (a,b,c) = (-\beta, \alpha + 3\beta, \alpha + 2\beta) \\ & \Leftrightarrow & \text{o sistema} \begin{cases} -\beta = a \\ \alpha + 3\beta = b \\ \alpha + 2\beta = c \end{cases} \text{é possível} \end{array}$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada do sistema, temos

$$\left[\begin{array}{rr|c} 0 & -1 & a \\ 1 & 3 & b \\ 1 & 2 & c \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_3]{} \left[\begin{array}{rr|c} 1 & 2 & c \\ 1 & 3 & b \\ 0 & -1 & a \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \rightarrow l_2 - l_1]{} \left[\begin{array}{rr|c} 1 & 2 & c \\ 0 & 1 & b-c \\ 0 & -1 & a \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \rightarrow l_3 + l_2]{} \left[\begin{array}{rr|c} 1 & 2 & c \\ 0 & 1 & b-c \\ 0 & 0 & a+b-c \end{array}\right] = U.$$

O sistema é possível se e só se $car(A) = car([A|b])$. Logo, o sistema é possível se e só se $a + b - c = 0$.

Assim, $U = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a + b - c = 0\}$.

Por conseguinte,

$$\begin{array}{rcl} W \cap U & = & \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid b = 0 \text{ e } a + b - c = 0\} \\ & = & \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid b = 0 \text{ e } c = a\} \\ & = & \{(a,0,a) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{a(1,0,1) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\} \\ & = & <(1,0,1)> \end{array}.$$

Como $(1,0,-1) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, a sequência $((1,0,1))$ é linearmente independente.

Uma vez que $W \cap U =< (1,0,-1) >$ e $((1,0,1))$ é linearmente independente, então $((1,0,1))$ é uma base de $W \cap U$.

(b) Comecemos por determinar uma base de $W \cap U$.

Tem-se

$$\begin{array}{rcl} W \cap U & = & \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_4 = 0 \text{ e } x_1 + x_2 + x_4 = 0\} \\ & = & \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = -2x_4 \text{ e } x_2 = x_4\} \\ & = & \{(-2x_4, x_4, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{x_3(0,0,1,0) + x_4(-2,1,0,1) \in \mathbb{R}^4 : x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ & = & <(0,0,1,0), (-2,1,0,1)>. \end{array}$$

A sequência $((0,0,1,0),(-2,1,0,1))$ é linearmente independente, uma vez que, para quaisquer $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,

$$(0,0,1,0)\neq\alpha(-2,1,0,1) \text{ e } (-2,1,0,1)\neq\beta(0,0,1,0).$$

Assim, considerando que $W\cap U=<(0,0,1,0),(-2,1,0,1)>$ e $((0,0,1,0),(-2,1,0,1))$ é linearmente independente, a sequência$((0,0,1,0),(-2,1,0,1))$ é uma base de $W\cap U$.

Determinemos, agora, uma base de $W+U$.

Temos

$$\begin{array}{rcl} W & = & \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 : x_1+2x_4=0\} \\ & = & \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 : x_1=-2x_4\} \\ & = & \{(-2x_4,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 : x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R} \\ & = & \{x_2(0,1,0,0)+x_3(0,0,1,0)+x_4(-2,0,0,1)\in\mathbb{R}^4 : x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R} \\ & = & <(0,1,0,0),(0,0,1,0),(-2,0,0,1)> \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} W & = & \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 : x_1+x_2+x_4=0\} \\ & = & \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 : x_1=-x_2-x_4\} \\ & = & \{(-x_2-x_4,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 : x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R} \\ & = & \{x_2(-1,0,1,0)+x_3(0,0,1,0)+x_4(-1,0,0,1)\in\mathbb{R}^4 : x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R} \\ & = & <(-1,0,1,0),(0,0,1,0),(-1,0,0,1)>, \end{array}$$

logo

$$W+U=<(0,1,0,0),(0,0,1,0),(-2,0,0,1),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)>.$$

Uma vez que

$$(-2,0,0,1)=0.(0,1,0,0)+(-1).(0,0,1,0)+1.(-1,0,1,0)+1.(-1,0,0,1),$$

segue que

$$W+U=<(0,1,0,0),(0,0,1,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)>.$$

A sequência $((0,1,0,0),(0,0,1,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1))$ é linearmente independente, pois, para quaisquer $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in\mathbb{R}$,

$$\begin{array}{l} \alpha_1(0,1,0,0)+\alpha_2(0,0,1,0)+\alpha_3(-1,0,1,0)+\alpha_4(-1,0,0,1)=(0,0,0,0) \\ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -\alpha_3-\alpha_4=0 \\ \alpha_1=0 \\ \alpha_2+\alpha_3=0 \\ \alpha_4=0 \end{array}\right. \\ \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0. \end{array}$$

Logo, $((0,1,0,0),(0,0,1,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1))$ é uma base de $W+U$.

(c) Comecemos por determinar uma base de $W\cap U$. Nesse sentido comecemos por descrever cada um dos conjuntos W e U em compreensão.

Dado $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$, tem-se

$$\begin{array}{rcl} (a,b,c,d)\in W & \Leftrightarrow & \exists_{x,y,z\in\mathbb{R}}\ (a,b,c,d)=(y,2y-x,x+y,z) \\ & \Leftrightarrow & \text{o sistema} \left\{\begin{array}{c} y=a \\ -x+2y=b \\ x+y=c \\ z=d \end{array}\right. \text{ é possível} \end{array}$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada do sistema, temos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & a \\ -1 & 2 & 0 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & c \\ -1 & 2 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \to l_2 + l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & c \\ 0 & 3 & 0 & b+c \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 3 & 0 & b+c \\ 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \leftrightarrow l_3 - 3l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & b+c-3a \\ 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \leftrightarrow l_4]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & b+c-3a \end{array}\right].$$

O sistema é possível se e só se $car(A) = car([A|b])$. Logo, o sistema é possível se e só se $-3a + b + c = 0$.

Assim, $W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^3 : -3a + b + c = 0\}$.

Determinemos agora as condições que carcaterizam o subespaço U. Dado $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, tem-se

$$\begin{array}{rcl} (a, b, c, d) \in U & \Leftrightarrow & \exists_{\alpha \in \mathbb{R}}\ (a, b, c, d) = ((\alpha, 3\alpha, 0, -\alpha) \\ & \Leftrightarrow & \text{o sistema} \left\{\begin{array}{c} \alpha = a \\ 3\alpha = b \\ 0 = c \\ -\alpha = d \end{array}\right. \text{é possível} \end{array}$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada do sistema, temos

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & a \\ 3 & b \\ 0 & c \\ -1 & d \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - 3l_1 \\ l_4 \to l_4 + l_1}]{} \left[\begin{array}{c|c} 1 & a \\ 0 & b-3a \\ 0 & c \\ 0 & d+a \end{array}\right]$$

O sistema é possível se e só se $car(A) = car([A|b])$. Logo, o sistema é possível se e só se $-3a + b = 0$, $c = 0$ e $d + a = 0$.

Assim, $U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \,|\, -3a + b = 0, c = 0, d + a = 0\}$.

Temos, então,

$$\begin{array}{rcl} W \cap U & = & \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \,|\, -3a + b + c = 0, -3a + b = 0, c = 0, d + a = 0\} \\ & = & \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \,|\, b = 3a, c = 0, d = -a\} \\ & = & \{(a, 3a, 0, -a) \in \mathbb{R}^4 \,|\, a \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{a(1, 3, 0, -1) \in \mathbb{R}^4 \,|\, a \in \mathbb{R}\} \\ & = & < (1, 3, 0, -1) > . \end{array}$$

Uma vez que $(1, 3, 0, -1) \neq 0_{\mathbb{R}^4}$, a sequência $((1, 3, 0, -1))$ é linearmente independente. Logo, $((1, 3, 0, -1))$ é uma base de $W \cap U$.

Determinemos, agora, uma base de $W + U$.

Temos

$$\begin{array}{rcl} W & = & \{(y, 2y - x, x + y, z) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{x(0, -1, 1, 0) + y(1, 2, 1, 0) + z(0, 0, 0, 1) \,|\, x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ & = & < (0, -1, 1, 0), (1, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 1) > \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} U & = & \{(\alpha, 3\alpha, 0, -\alpha) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{\alpha(1, 3, 0, -1) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \\ & = & < (1, 3, 0, -1) >, \end{array}$$

donde

$$W + U =< (0, -1, 1, 0), (1, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 3, 0, -1) > .$$

A sequência $((0,-1,1,0),(1,2,1,0),(0,0,0,1),(1,3,0,-1))$ é uma base de $W+U$ se e só se for uma sequência linearmente independente, ou seja, se e só se, para quaisquer $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4 \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1(0,-1,1,0)+\alpha_2(1,2,1,0)+\alpha_3(0,0,0,1)+\alpha_4(1,3,0,-1)=0_{\mathbb{R}^4} \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0.$$

A condição anterior é verdadeira se e só se o sistema sse o sistema

$$\begin{cases} \alpha_2+\alpha_4=0 \\ -\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_4=0 \\ \alpha_1+\alpha_2=0 \\ \alpha_3-\alpha_4=0 \end{cases}$$

é determinado (note-se que o sistema é possível, pois é um sistema homogéneo). Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz simples do sistema, temos

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \to l_2+l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3-3l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=U.$$

Uma vez que $car(A)=3<4=$ nº incógnitas, o sistema é interminado. O sistema homogéneo com matriz simples U é o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2=0 \\ \alpha_2+\alpha_4=0 \\ \alpha_3-\alpha_4=0 \end{cases},$$

donde se obtem

$$\begin{cases} \alpha_1=-\alpha_2 \\ \alpha_4=-\alpha_2 \\ \alpha_3=-\alpha_2 \end{cases}.$$

Considerando $\alpha_2=1$, temos $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=-1$. Então

$$-(0,-1,1,0)+(1,2,1,0)-(0,0,0,1)-(1,3,0,-1)=0_{\mathbb{R}^4},$$

donde se obtem

$$(1,2,1,0)=(0,-1,1,0)+(0,0,0,1)+(1,3,0,-1).$$

Logo,

$$\begin{aligned} W+U &= <(0,-1,1,0),(1,2,1,0),(0,0,0,1),(1,3,0,-1)> \\ &= <(0,-1,1,0),(0,0,0,1),(1,3,0,-1)>. \end{aligned}$$

Verifiquemos, agora, se a sequência $((0,-1,1,0),(0,0,0,1),(1,3,0,-1))$ é linearmente independente. Esta sequência é linearmente independente sse, para quaisquer $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1(0,-1,1,0)+\alpha_2(0,0,0,1)+\alpha_3(1,3,0,-1)=0_{\mathbb{R}^4} \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$$

sse, para quaisquer $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R}$,

$$(\alpha_3,-\alpha_1+3\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2-\alpha_3)=0_{\mathbb{R}^4} \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$$

sse o sistema

$$\begin{cases} \alpha_3=0 \\ -\alpha_1+3\alpha_3=0 \\ \alpha_1=0 \\ \alpha_2-\alpha_3=0 \end{cases}$$

é determinado (note-se que o sistema é possível, pois é um sistema homogéneo). Resolvendo este sistema, obtem-se $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$. Logo, a sequência $((0,-1,1,0),(0,0,0,1),(1,3,0,-1))$ é linearmente independente e, portanto, é uma base de $W+U$.

Exercício 3.18

Indique, se existir, uma base do espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$ da qual façam parte os vetores:

(a) $(1, 0, -1, 2), (1, 0, 1, 0)$.

(b) $(0, 1, 1, -1), (0, 1, 0, 2), (0, 2, 1, 1)\}$.

(c) $(1, -1, -1, 2), (0, 1, 2, 0), (1, 0, 1, -2)$.

Resolução:

(a) Sejam $u_1 = (1, 0, -1, 2)$ e $u_2 = (1, 0, 1, 0)$. Atendendo a que os vetores u_1 e u_2 só podem fazer parte de uma base de $\mathbb{R}^4$ se a sequência (u_1, u_2) for linearmente independente, comecemos por averiguar a independência linear desta sequência. Ora, como, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos, $u_1 \neq \alpha u_2$ e $u_2 \neq \beta u_1$, a sequência (u_1, u_2) é linearmente independente. Logo, como $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^4$ e (u_1, u_2) é linearmente independente, existe uma base de $\mathbb{R}^4$ da qual fazem parte os vetores u_1 e u_2. No sentido de determinarmos uma base de $\mathbb{R}^4$ nestas condições, consideremos a base canónica de $\mathbb{R}^4$, i.e., a base (e_1, e_2, e_3, e_4) onde $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$ e $e_4 = (0, 0, 0, 1)$. Uma vez que

$$u_1 = e_1 + 0e_2 - e_3 + 2e_4$$

e em u_1 a coordenada relativa a e_1 é não nula, tem-se

$$< e_1, e_2, e_3, e_4 >=< u_1, e_2, e_3, e_4 > .$$

Por outro lado, como $e_1 = u_1 + 0e_2 + e_3 - 2e_4$ e $u_2 = e_1 + 0e_2 + e_3 + 0e_4$, segue que

$$u_2 = u_1 + 0e_2 + 2e_3 - 2e_4.$$

Atendendo a que em u_2 a coordenada relativa a e_3 é diferente de zero, temos

$$< u_1, e_2, e_3, e_4 >=< u_1, e_2, u_2, e_4 > .$$

Considerando que $< e_1, e_2, e_3, e_4 >=< u_1, e_2, u_2, e_4 >$, (e_1, e_2, e_3, e_4) é linearmente independente e (u_1, u_2) é linearmente independente, conclui-se que (u_1, e_2, u_2, e_4) é linearmente independente.
Então, como $\mathbb{R}^4 =< u_1, e_2, u_2, e_4 >$ e (u_1, e_2, u_2, e_4) é linearmente independente, a sequência (u_1, e_2, u_2, e_4) é uma base de $\mathbb{R}^4$.

(b) Sejam $u_1 = (0, 1, 1, -1)$, $u_2 = (0, 1, 0, 2)$ e $(0, 2, 1, 1)$. A sequência (u_1, u_2, u_3) é linearmente dependente, pois $u_3 = u_1 + u_2$. Logo, não existe qualquer base de $\mathbb{R}^4$ que inclua estes vetores (uma base de $\mathbb{R}^4$ é uma sequência de vetores linearmente independente; qualquer sequência que inclua os vetores dados será também linearmente dependente).

(c) Sejam $u_1 = (1, -1, -1, 2)$, $u_2 = (0, 1, 2, 0)$ e $u_3 = (1, 0, 1, -2)$. Atendendo a que os vetores u_1, u_2 e u_3 só podem fazer parte de uma base de $\mathbb{R}^4$ se a sequência (u_1, u_2, u_3) for linearmente independente, comecemos por averiguar a independência linear desta sequência.

Ora, atendendo a que, para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
& \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^4} \\
\Rightarrow \quad & (\alpha_1 + \alpha_3, -\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 - 2\alpha_3) = (0, 0, 0, 0) \\
\Rightarrow \quad & \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_3 = 0 \end{cases} \qquad , \\
\Rightarrow \quad & \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0
\end{aligned}$$

a sequência (u_1, u_2, u_3) é linearmente independente.

Logo, como $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^4$ e (u_1, u_2, u_3) é linearmente independente, existe uma base de $\mathbb{R}^4$ da qual fazem parte os vetores u_1, u_2 e u_3. No sentido de determinarmos uma base de $\mathbb{R}^4$ nestas condições, consideremos a base canónica de $\mathbb{R}^4$, i.e., a base (e_1, e_2, e_3, e_4) onde $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$ e $e_4 = (0, 0, 0, 1)$. Uma vez que

$$u_1 = e_1 - e_2 - e_3 + 2e_4$$

e em u_1 a coordenada relativa a e_1 é não nula, tem-se

$$< e_1, e_2, e_3, e_4 >=< u_1, e_2, e_3, e_4 > .$$

Além disso, como $e_1 = u_1 + e_2 + e_3 - 2e_4$ e $u_2 = 0e_1 + e_2 + 2e_3 + 0e_4$, segue que

$$u_2 = 0u_1 + e_2 + 2e_3 + 0e_4.$$

Então, como em u_2 a coordenada relativa a e_2 é diferente de zero, temos

$$< u_1, e_2, e_3, e_4 >=< u_1, u_2, e_3, e_4 > .$$

De $u_3 = e_1 + 0e_2 + e_3 - 2e_4$, $e_1 = u_1 + e_2 + e_3 - 2e_4$ e $e_2 = 0u_1 + u_2 - 2e_3 + 0e_4$, obtem-se $u_3 = u_1 + e_2 + 2e_3 - 4e_4$, donde resulta

$$u_3 = u_1 + u_2 + 0e_3 - 4e_4.$$

Atendendo a que em u_3 a coordenada relativa a e_4 é diferente de zero, segue que

$$< u_1, u_2, e_3, e_4 >=< u_1, u_2, e_3, u_3 > .$$

Considerando que $< e_1, e_2, e_3, e_4 >=< u_1, u_2, e_3, u_3 >$, (e_1, e_2, e_3, e_4) é linearmente independente e (u_1, u_2, u_3) é linearmente independente, conclui-se que a sequência (u_1, u_2, e_3, u_3) também é linearmente independente.

Então, como $\mathbb{R}^4 =< u_1, u_2, e_3, u_3 >$ e (u_1, u_2, e_3, u_3) é linearmente independente, a sequência (u_1, u_2, e_3, u_3) é uma base de $\mathbb{R}^4$.

Exercício 3.19

Determine um suplementar de:

(a) $W =< (1, 0, -1, 2), (1, 0, 1, 0) >$ relativamente a $\mathbb{R}^4$.

(b) $U =< (1, -1, -1, 2), (0, 1, 2, 0), (1, 0, 1, -2) >$ relativamente a $\mathbb{R}^4$.

(c) $F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : 2a + b = 0 \text{ e } c = 0\}$ relativamente a $\mathbb{R}^4$.

Resolução:

(a) Para determinar um suplementar de W relativamente a $\mathbb{R}^4$, começamos por determinar uma base de W. Da alínea (a) do exercício anterior sabe-se que a sequência $((1, 0, -1, 2), (1, 0, 1, 0))$ é linearmente independente. Logo, $((1, 0, -1, 2), (1, 0, 1, 0))$ é uma base de W.

Seguidamente determinamos uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclua os vetores de uma base de W. Também pelo exercício anterior, sabemos que $((1, 0, -1, 2), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ é uma base $\mathbb{R}^4$ que inclui os vetores da base de W indicada anteriormente.

Logo, $W' =< (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1) >$ é um suplementar de W relativamente a $\mathbb{R}^4$.

(b) Para determinar um suplementar de U relativamente a $\mathbb{R}^4$ começamos por determinar uma base de U. Da alínea (c) do exercício anterior sabe-se que a sequência $((1, -1, -1, 2), (0, 1, 2, 0), (1, 0, 1, -2))$ é linearmente independente. Logo, $((1, -1, -1, 2), (0, 1, 2, 0), (1, 0, 1, -2))$ é uma base de U.

Seguidamente determinamos uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclua os vetores de uma base de U. Do exercício anterior sabe-se que $((1,-1,-1,2),(0,1,2,0),(0,0,1,0),(1,0,1,-2))$ é uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclui os vetores da base de U indicada anteriormente.

Logo, $U' =< (0,0,1,0)) >$ é um suplementar de U relativamente a $\mathbb{R}^4$.

(c) Para determinar um suplementar de F relativamente a $\mathbb{R}^4$, começamos por determinar uma base de U. Tem-se

$$\begin{aligned} F &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : 2a+b=0 \text{ e } c=0\} \\ &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : b=-2a \text{ e } c=0\} \\ &= \{(a,-2a,0,d) \in \mathbb{R}^4 : a,d \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(1,-2,0,0)+d(0,0,0,1) \in \mathbb{R}^4 : a,d \in \mathbb{R}\} \\ &= < (1,-2,0,0),(0,0,0,1) > \end{aligned}$$

Os vetores $(1,-2,0,0)$ e $(0,0,0,1)$ são linearmente independentes, pois, para quaisquer $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$,

$$(1,-2,0,0) \neq \alpha(0,0,0,1) \text{ e } (0,0,0,1) \neq \beta(1,-2,0,0).$$

Logo, $((1,-2,0,0),(0,0,0,1))$ é uma base de U.

Seguidamente, determinamos uma base de $\mathbb{R}^4$ da qual façam parte os vetores $u_1 = (1,-2,0,0)$ e $u_2 = (0,0,0,1)$. Para tal, consideremos a base canónica de $\mathbb{R}^4$, i.e., a base (e_1,e_2,e_3,e_4) onde $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$ e $e_4 = (0,0,0,1)$. Uma vez que

$$u_1 = e_1 - 2e_2 + 0e_3 + 0e_4$$

e a coordenada de u_1 relativa a e_1 é diferente de zero, tem-se $< e_1,e_2,e_3,e_4 >=< u_1,e_2,e_3,e_4 >$.
Por outro lado, considerando que $< e_1,e_2,e_3,e_4 >=< u_1,e_2,e_3,e_4 >=< u_1,e_2,e_3,u_2 >$, (e_1,e_2,e_3,e_4) é linearmente independente e (u_1,u_2) é linearmente independente, conclui-se que a sequência (u_1,e_2,e_3,u_2) é linearmente independente.
Assim, como $\mathbb{R}^4 =< u_1,e_2,e_3,u_2 >$ e (u_1,e_2,e_3,u_2) é linearmente independente, a sequência (u_1,e_2,e_3,u_2) é uma base de $\mathbb{R}^4$.

Como (u_1,e_2,e_3,u_2) é uma base de $\mathbb{R}^4$ e (u_1,u_2) é uma base de F, então $F' =< e_2,e_3 >$ é um suplementar de F relativamente a $\mathbb{R}^4$.

Exercício 3.20
Sejam $n \in \mathbb{N}$, W,U subespaços do espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$, (w_1,w_2,w_3,w_4) uma base de W e (u_1,u_2,u_3) uma base de U. Sendo $z_1 = 2w_1 + w_2 - w_3 = u_1 + 2u_2$ e $z_2 = -w_2 + w_4 = u_2 - u_3$, admita que (z_1,z_2) é base de $W \cap U$.
Indique, justificando,

(a) uma base de W que inclua z_1,z_2.
(b) uma base de U que inclua z_1,z_2.
(c) uma base de $W+U$.

Resolução:

(a) Uma vez que (z_1,z_2) é base de $W \cap U$, então $z_1,z_2 \in W$ e (z_1,z_2) é linearmente independente. Logo existe uma base de W que inclui z_1 e z_2.
Como $z_1 = 2w_1 + w_2 - w_3$ e em z_1 a coordenada relativa a w_2 é diferente de zero, então

$$< w_1,w_2,w_3,w_4 >=< w_1,z_1,w_3,w_4 > .$$

Atendendo a que $w_2 = z_1 - 2w_1 + w_3$ e $z_2 = -w_2 + w_4$, segue que $z_2 = -z_1 + 2w_1 - w_3 + w_4$. Uma vez que em z_2 a coordenada relativa a w_3 é não nula, resulta que

$$< w_1,z_1,w_3,w_4 >=< w_1,z_1,z_2,w_4 > .$$

Como $< w_1,w_2,w_3,w_4 >=< w_1,z_1,z_2,w_4 >$, (w_1,w_2,w_3,w_4) é linearmente independente e (z_1,z_2) é linearmente independente, então (w_1,z_1,z_2,w_4) é linearmente independente. Logo, (w_1,z_1,z_2,w_4) é uma base de W.

(b) Uma vez que (z_1, z_2) é base de $W \cap U$, então $z_1, z_2 \in U$ e (z_1, z_2) é linearmente independente. Logo existe uma base de U que inclui z_1 e z_2.
Como $z_1 = u_1 + 2u_2$ e em z_1 a coordenada relativa a u_1 é diferente de zero, então

$$< u_1, u_2, u_3 >=< z_1, u_2, u_3 > .$$

Atendendo a que $u_1 = z_1 - 2u_2$ e $z_2 = u_2 - u_3$, segue que $z_2 = 0z_1 + u_2 - u_3$. Uma vez que em z_2 a coordenada relativa a u_2 é não nula, temos

$$< z_1, u_2, u_3 >=< z_1, z_2, u_3 > .$$

Como $< u_1, u_2, u_3 >=< z_1, z_2, u_3 >$, (u_1, u_2, u_3) é linearmente independente e (z_1, z_2) é linearmente independente, então (z_1, z_2, u_3) é linearmente independente. Logo, (z_1, z_2, u_3) é uma base de U.

(c) Atendendo a que $\dim(W+U) = \dim W + \dim U - \dim(W \cap U)$, $\dim W = 4$, $\dim U = 3$ e $\dim W \cap U = 2$, temos $\dim(W + U) = 5$. Por outro lado, sabe-se que

$$W + U =< w_1, z_1, z_2, w_4 > + < z_1, z_2, u_3 >=< w_1, z_1, z_2, w_4, u_3 > .$$

Então, como $\dim(W+U) = 5$, $W+U =< w_1, z_1, z_2, w_4, u_3 >$ e $\{w_1, z_1, z_2, w_4, u_3\}$ tem 5 elementos, conclui-se que $(w_1, z_1, z_2, w_4, u_3)$ é uma base de $W + U$.

Exercício 3.21

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e W, U subespaços vetoriais do espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes:

(a) Se $\mathrm{dimW} \leq \mathrm{dimU}$, então $W \subseteq U$.
(b) Se $\mathrm{dimW} = \mathrm{dimU}$, então $\mathrm{dim(W + U) = dimW + dimU}$.
(c) Se $\mathrm{dimU + dimW = dim}\mathbb{R}^\mathrm{n}$, então $\mathbb{R}^n$ é soma direta de U e W.
(d) Se $\mathrm{dim(U + W) = dim}\mathbb{R}^\mathrm{n}$, então $\mathbb{R}^n$ é soma direta de U e W.
(e) Se $\mathrm{dim(U + W) = dimU + dimW}$, então V é soma direta de U e W.
(f) Se V é soma direta de U e W, então $\mathrm{dim(U + W) = dimU + dimW}$.

Resolução:

(a) A afirmação é falsa.

Contra-exemplo: Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $W =< (1, 0, 0) >$ e $U =< (0, 1, 0), (0, 0, 1) >$. Neste caso, temos $\dim W = 1 \leq \dim U = 2$, mas $W \nsubseteq U$ (por exemplo, $(1, 0, 0) \neq \alpha(0, 1, 0) + \beta(0, 0, 1)$, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

(b) A afirmação é falsa.

Contra-exemplo: Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $W =< (1, 0, 0), (0, 1, 0) >$, $U =< (0, 1, 0), (0, 0, 1) >$. Para os espaços vetorias indicados, temos $\dim W = 2 = \dim U$, $\dim(W + U) = 3$ (pois $W + U =< (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) >$ e $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ é linearmente independente) e $\dim W + \dim U = 4$.

(c) A afirmação é falsa.

Contra-exemplo: Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $W =< (1, 0, 0) >$, $U =< (1, 0, 0), (0, 0, 1) >$. No caso dos espaços vetoriais indicados, temos $\dim W + \dim U = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, mas $\mathbb{R}^3$ não é soma direta de W e U, pois $W + U =< (1, 0, 0), (0, 0, 1) >\neq \mathbb{R}^3$.

(d) A afirmação é falsa.

Contra-exemplo: Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $W =< (1, 0, 0), (0, 1, 0) >$, $U =< (0, 1, 0), (0, 0, 1) >$. Neste exemplo, temos $\dim(W + U) = 3$ (pois $W + U =< (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) >$ e $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ é linearmente independente). Então $\dim(W + U) = \dim \mathbb{R}^3$, mas $\mathbb{R}^3$ não é soma direta de W e U, uma vez que $W \cap U \neq \{(0, 0, 0)\}$ (note-se que $(0, 1, 0) \in W \cap U$).

(e) A afirmação é falsa.

Contra-exemplo: Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $W =< (1,0,0) >$, $U =< (0,1,0) >$. Tem-se $\dim W + \dim U = 1 + 1 = 2$, $\dim(W+U) = 2$ (pois $W + U =< (1,0,0),(0,1,0) >$ e $((1,0,0),(0,1,0))$ é linearmente independente) e $\mathbb{R}^3$ não é soma direta de W e U, pois $W + U =< (1,0,0),(0,1,0) > \neq \mathbb{R}^3$.

(f) A afirmação é verdadeira.

Se V é soma direta de U e W, então $W \cap U = \{0_V\}$. Logo, como

$$\mathrm{dim(U+W) = dimU + dimW - dim(W \cap U)}$$

e $\dim(W \cap U) = 0$, temos $\mathrm{dim(U+W) = dimU + dimW}$.

Exercício 3.22

Usando o conceito de característica de uma matriz, determine a dimensão dos subespaços vetoriais:

(a) $\langle(3,-1,4),(2,1,3),(1,0,2)\rangle$ de $\mathbb{R}^3$.

(b) $\langle(0,1,1,2),(-2,1,0,1),(3,1,5,2),(1,0,3,-1)\rangle$ de $\mathbb{R}^4$.

(c) $\langle(1,2,1,2),(-2,-4,0,2),(3,2,1,0),(6,0,3,-3)\rangle$ de $\mathbb{R}^4$.

Resolução:

(a) Uma vez que

$$\dim\langle(3,-1,4),(2,1,3),(1,0,2)\rangle = car\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

comecemos por determinar a característica da matriz seguinte

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, obtemos

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - 2l_1 \\ l_3 \to l_3 - 3l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3 + l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = U$$

A matriz A é equivalente por linhas à matriz em escada U com 3 linhas não nulas, logo $car(A) = 3$ e, portanto, $\dim\langle(3,-1,4),(2,1,3),(1,0,2)\rangle = 3$.

(b) Considerando que

$$\dim\langle(0,1,1,2),(-2,1,0,1),(3,1,5,2),(1,0,3,-1)\rangle = car\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix},$$

comecemos por determinar a característica da matriz seguinte

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Reduzindo esta matriz a uma matriz em escada conclui-se que $car(A) = 3$. Logo,

$$\dim \langle (0,1,1,2),(-2,1,0,1),(3,1,5,2),(1,0,3,-1)\rangle = 3.$$

(c) Uma vez que

$$\dim \langle (1,2,1,2),(-2,-4,0,2),(3,2,1,0),(6,0,3,-3)\rangle = car \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix},$$

comecemos por determinar a característica da matriz seguinte

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Reduzindo a matriz A a uma matriz em escada, conclui-se que $car(A) = 4$. Logo,

$$\dim \langle (1,2,1,2),(-2,-4,0,2),(3,2,1,0),(6,0,3,-3)\rangle = 4.$$

Exercício 3.23

Considere os seguintes vetores do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (\alpha, 6, -1), v_2 = (1, \alpha, -1), v_3 = (2, \alpha, -3).$$

(a) Determine os valores do parâmetro real α para os quais (v_1, v_2, v_3) é uma base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Para um dos valores de α determinados na alínea anterior, calcule as coordenadas do vetor $v = (-1, 1, 2)$ em relação à base (v_1, v_2, v_3).

Resolução:

(a) Uma vez que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, uma sequência de 3 vetores de $\mathbb{R}^3$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ se e só se é uma sequência linearmente independente. Assim, a sequência (v_1, v_2, v_3) é uma base de $\mathbb{R}^3$ se e só se (v_1, v_2, v_3) é linearmente independente, i.e., se e só se

$$car \begin{bmatrix} \alpha & 6 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 4 & \alpha & -3 \end{bmatrix} = 3.$$

Seja A a matriz anterior. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, temos

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 6 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 4 & \alpha & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ \alpha & 6 & -1 \\ 2 & \alpha & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - \alpha l_1 \\ l_3 \to l_3 - 2l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 0 & 6-\alpha^2 & -1+\alpha \\ 0 & -\alpha & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 0 & -\alpha & -1 \\ 0 & 6-\alpha^2 & -1+\alpha \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3 - \alpha l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 0 & -\alpha & -1 \\ 0 & 6 & -1+2\alpha \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 0 & 6 & -1+2\alpha \\ 0 & -\alpha & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3 + \frac{\alpha}{6}]{} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 0 & 6 & -1+2\alpha \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\alpha^2 - \frac{1}{6}\alpha - 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, $car(A) = 3$ se e só se $\frac{1}{3}\alpha^2 - \frac{1}{6}\alpha - 1 \neq 0$ se e só se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$.

(b) Seja $\alpha = 1$. Então $(v_1, v_2, v_3) = ((1,6,-1),(1,1,-1),(2,1,-3))$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Tem-se

$$(-1,1,2) = \alpha_1(1,6,-1) + \alpha_2(1,1,-1) + \alpha_3(2,1,-3)$$

se e só se

$$\alpha_1 = \frac{1}{5}, \alpha_2 = \frac{4}{5}, \alpha_3 = -1.$$

Logo, as coordenadas de $(-1, 1, 2)$ relativamente à base (v_1, v_2, v_3) são $\frac{1}{5}$, $\frac{4}{5}$, -1.

4 Aplicações lineares

Exercícios e resoluções

Exercício 4.1

Diga quais das aplicações seguintes, entre espaços vetoriais reais, são aplicações lineares:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (2x + y, x, y - x)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(x, y, z) = (y^2, y)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(a, b) = 5a - 2b$, $\forall\ (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

(d) $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $s(a, b, c) = (1, a + b)$, $\forall\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Resolução:

Sejam V e V' espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma aplicação $f : V \to V'$ diz-se uma aplicação linear se:

(i) Para quaisquer $x, y \in V$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

(ii) Para qualquer $x \in V$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

(a) Para quaisquer $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\
&= (2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), x_1 + x_2, (y_1 + y_2) - (x_1 + x_2)) \\
&= ((2x_1 + y_1) + (2x_2 + y_2), x_1 + x_2, (y_1 - x_1) + (y_2 - x_2)) \\
&= (2x_1 + y_1, x_1, y_1 - x_1) + (2x_2 + y_2, x_2, y_2 - x_2) \\
&= f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2).
\end{aligned}$$

Para quaisquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f(\alpha(x, y)) &= f(\alpha x, \alpha y) \\
&= (2(\alpha x) + \alpha y, \alpha x, \alpha y - \alpha x) \\
&= \alpha(2x + y, x, y - x) \\
&= \alpha f(x, y).
\end{aligned}$$

Logo, f é uma aplicação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$.

(b) A aplicação g não é uma aplicação linear, pois existem $(0,1,0),(0,2,0) \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$g((0,1,0)+(0,2,0) \neq g(0,1,0)+g(0,2,0).$$

De facto, tem-se

$$g((0,1,0)+(0,2,0)) = g(0,3,0) = (9,3)$$

e

$$g(0,1,0)+g(0,2,0) = (1,1)+(4,2) = (5,3).$$

(c) Para quaisquer $(a_1,b_1),(a_2,b_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{array}{rcl} h((a_1,b_1)+(a_2,b_2)) & = & h(a_1+a_2,b_1+b_2) \\ & = & 5(a_1+a_2)-2(b_1+b_2) \\ & = & (5a_1-2b_1)+(5a_2-2b_2) \\ & = & h(a_1,b_1)+h(a_2,b_2). \end{array}$$

Para quaisquer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} h(\alpha(a,b)) & = & h(\alpha a,\alpha b) \\ & = & 5(\alpha a)-2(\alpha b) \\ & = & \alpha(5a-2b) \\ & = & \alpha h(a,b). \end{array}$$

Logo, h é uma aplicação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$.

(d) A aplicação s não é uma aplicação linear, pois existem $(1,1,1),(2,2,2) \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$s((1,1,1)+(2,2,2)) \neq s(1,1,1)+s(2,2,2).$$

De facto, tem-se

$$s((1,1,1)+(2,2,2)) = s(3,3,3) = (1,6)$$

e

$$s(1,1,1)+h(2,2,2) = (1,2)+(1,4) = (2,6).$$

Exercício 4.2

Para cada $k \in \mathbb{R}$, seja $g_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação definida por

$$g_k(a_1,a_2,a_3,a_4) = (a_4-k,0,2a_1+a_3), \forall (a_1,a_2,a_3,a_4) \in \mathbb{R}^4.$$

Determine os valores de k para os quais g_k é aplicação linear.

Resolução:

Sejam V e V' espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma aplicação $f : V \to V'$ diz-se uma aplicação linear se:

(i) Para quaisquer $x,y \in V$, $f(x+y) = f(x)+f(y)$.

(ii) Para qualquer $x \in V$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Além disso, sabe-se que se f é uma aplicação linear de V em V', então $f(0_V) = 0_{V'}$.

Assim, se g_k é uma aplicação linear, tem-se $g_k(0,0,0) = (0,0,0)$, donde resulta

$$(-k,0,0) = (0,0,0)$$

e, portanto, $k = 0$.

Reciprocamente, prova-se que se $k = 0$, então g_k é uma aplicação linear. De facto,

Para quaisquer $(a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$,

$$\begin{aligned} g_0((a_1, a_2, a_3, a_4) + (b_1, b_2, b_3, b_4)) &= g_0(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4) \\ &= (a_4 + b_4, 0, 2(a_1 + b_1) + (a_3 + b_3)) \\ &= (a_4 + b_4, 0, (2a_1 + a_3) + (2b_1 + b_3)) \\ &= (a_4, 0, 2a_1 + a_3) + (b_4, 0, 2b_1 + b_3) \\ &= g_0(a_1, a_2, a_3, a_4) + g_0(b_1, b_2, b_3, b_4). \end{aligned}$$

Para quaisquer $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g_0(\alpha(a_1, a_2, a_3, a_4)) &= g_0(\alpha(a_1, \alpha a_2, \alpha a_3, \alpha a_4)) \\ &= (\alpha a_4, 0, 2(\alpha a_1) + a_3) \\ &= \alpha(a_4, 0, 2a_1 + a_3) \\ &= \alpha g_0(a_1, a_2, a_3, a_4). \end{aligned}$$

Provámos, então, que g_k é uma aplicação linear se e só se $k = 0$.

Exercício 4.3

Diga, justificando, se existe

(a) uma aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(1, 0, 0) = (0, 0, 1),\ f(0, 0, 1) = (1, 0, 0),\ f(7, 0, 14) = (0, 0, 7).$$

(b) uma aplicação linear $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$g(-1, 2) = (0, 1, 2, 3),\ g(2, -1) = (0, -1, -2, -3).$$

Resolução:

(a) Sejam V e V' espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma aplicação $f : V \to V'$ diz-se uma aplicação linear se:

(i) Para quaisquer $x, y \in V$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

(ii) Para qualquer $x \in V$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Tem-se $(7, 0, 14) = 7(1, 0, 0) + 14(0, 0, 1)$. Assim, se admitirmos que f é uma aplicação linear nas condições indicadas, temos

$$\begin{aligned} f(7, 0, 14) &= f(7(1, 0, 0) + 14(0, 0, 1)) \\ &= 7f(1, 0, 0) + 14f(0, 0, 1) = 7(0, 0, 1) + 14(1, 0, 0) \\ &= (14, 0, 7), \end{aligned}$$

o que contradiz $f(7, 0, 14) = (0, 0, 7)$.

Logo, não existe qualquer aplicação linear nas condições referidas.

(b) A sequência de vetores $((-1, 2), (2, -1))$ é linearmente independente, pois, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tem-se $(-1, 2) \neq \alpha(2, -1)$ e $(2, -1) \neq \beta(2, -1)$. Então, como $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ e $((-1, 2), (2, -1))$ é uma sequência de vetores de $\mathbb{R}^2$ linearmente independente, $((-1, 2), (2, -1))$ é uma base de $\mathbb{R}^2$. Logo, pelo Teorema da Extensão Linear, sabe-se que, para quaisquer $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$, existe uma aplicação linear $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que $g(-1, 2) = v_1$ e $g(2, -1) = v_2$; em particular, existe uma aplicação linear $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que $g(-1, 2) = (0, 1, 2, 3)$ e $g(2, -1) = (0, -1, -2, -3)$

Exercício 4.4
Para cada uma das aplicações lineares a seguir indicadas, determine o seu núcleo, o espaço imagem e uma base de cada um destes espaços vetoriais. Diga, justificando, se cada uma das aplicações é injetiva e se é sobrejetiva.

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por
$$f(x, y, z) = (y, x),$$
para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(b) $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por
$$g(x, y, z, w) = (x + y, 0, y - z),$$
para qualquer $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$.

(c) $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por
$$h(a, b, c, d) = (2a + b, b, d - b),$$
para qualquer $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$).

Resolução:

(a) Para a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por
$$f(x, y, z) = (y, x),$$
para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos
$$\begin{array}{rcl} \text{Nuc}f & = & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, f(x, y, z) = (0, 0)\} \\ & = & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (y, x) = (0, 0)\} \\ & = & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = y = 0\} \\ & = & \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{z(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z \in \mathbb{R}\} \\ & = & < (0, 0, 1) > . \end{array}$$

A sequência $((0, 0, 1))$ é linearmente independente, pois $(0, 0, 1) \neq \mathbb{R}^3$. Logo, $((0, 0, 1))$ é uma base de Nuc$f$.

Por definição de Imf, temos
$$\begin{array}{rcl} \text{Im}f & = & \{f(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ & = & \{(y, x) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ & = & \{x(0, 1) + y(1, 0) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x, y \in \mathbb{R}\} \\ & = & < (0, 1), (1, 0) > . \end{array}$$

A sequência de vetores $((1, 0), (0, 1))$ é linearmente independente, pois, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(1, 0) \neq \alpha(1, 0)$ e $(0, 1) \neq \beta(0, 1)$. Logo, $((1, 0), (0, 1))$ é uma base de Imf.

A aplicação linear f não é injetiva, pois Nuc$f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Atendendo a que Im$f =< (0, 1), (1, 0) >= \mathbb{R}^2$, a aplicação f é sobrejetiva.

(b) Para a aplicação linear $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por
$$g(x, y, z, w) = (x + y, 0, y - z), \forall (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4,$$
temos
$$\begin{array}{rcl} \text{Nuc}g & = & \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, g(x, y, z, w) = (0, 0)\} \\ & = & \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, (x + y, 0, y - z) = (0, 0)\} \\ & = & \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x = -y, z = y\} \\ & = & \{(-y, y, y, w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, y \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{y(-1, 1, 1, 0) + w(0, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^4 \,|\, y \in \mathbb{R}\} \\ & = & < (-1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1) > . \end{array}$$

A sequência $((-1,1,1,0),(0,0,0,1))$ é linearmente independente, pois, para quaisquer $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $(-1,1,1,0) \neq \alpha(0,0,0,1)$ e $(0,0,0,1) \neq \beta(-1,1,1,0)$. Logo, $((-1,1,1,0),(0,0,0,1))$ é uma base de Nuc$g$.

Para o espaço Img, temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}g &= \{g(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4\} \\
&= \{(x+y,0,y-z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^4\} \\
&= \{x(1,0,0)+y(1,0,1)+z(0,0,-1) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x,y \in \mathbb{R}\} \\
&= <(1,0,0),(1,0,1),(0,0,-1)> \\
&= <(1,0,0),(0,0,-1)> \qquad \text{(pois} \quad (1,0,1) = 1.(1,0,0) - 1(0,0,-1)).
\end{aligned}$$

A sequência de vetores $((1,0,0),(0,0,-1))$ é linearmente independente, pois, para quaisquer $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $(1,0,0) \neq \alpha(0,0,-1)$ e $(0,0,-1) \neq \beta(0,0,1)$. Logo, $((1,0,0),(0,0,-1))$ é uma base de Img.

A aplicação linear g não é injetiva, pois Nuc$g \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$. Atendendo a que $\dim \mathrm{Im}g = 2 \neq \dim 3 = \mathbb{R}^3$, tem-se Im$g \neq \mathbb{R}^3$ e, portanto, g não é sobrejetiva.

(c) Para a aplicação linear $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$h(a,b,c,d) = (2a+b,b,d-b),$$

para qualquer $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Nuc}h &= \big\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \,|\, h(a,b,c,d) = (0,0,0)\big\} \\
&= \big\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \,|\, (2a+b,b,d-b) = (0,0,0)\big\} \\
&= \big\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \,|\, a=b=d=0, c \in \mathbb{R}\big\} \\
&= \big\{(0,0,c,0) \in \mathbb{R}^4 \,|\, c \in \mathbb{R}\big\} \\
&= \big\{c(0,0,1,0) \in \mathbb{R}^4 \,|\, c \in \mathbb{R}\big\} \\
&= \langle (0,0,1,0) \rangle .
\end{aligned}$$

A sequência $((0,0,1,0))$ é linearmente independente, pois,

$$(0,0,1,0) \neq (0,0,0,0).$$

Logo, $((0,0,1,0))$ é uma base de Nuc$h$.

Relativamente ao espaço Imh, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}h &= \big\{h(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\big\} \\
&= \{(2a+b,b,d-b) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a,b,c,d \in \mathbb{R}\} \\
&= \{a(2,0,0)+b(1,1,-1)+d(0,0,1) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x,y \in \mathbb{R}\} \\
&= <(2,0,0),(1,1,-1),(0,0,1)> .
\end{aligned}$$

A sequência de vetores $((2,0,0),(1,1,-1),(0,0,1))$ é linearmente independente, pois, para quaisquer $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$,

$$\alpha(2,0,0)+\beta(1,1,-1)+\gamma(0,0,1) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0.$$

Logo, $((2,0,0),(1,1,-1),(0,0,1))$ é uma base de Imh.

A aplicação linear h não é injetiva, pois Nuc$h \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$. Atendendo a que $\dim \mathrm{Im}h = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ e Im$h = \mathbb{R}^3$, tem-se Im$h = \mathbb{R}^3$ e, portanto, h é sobrejetiva.

Exercício 4.5

4.5. Sejam $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ uma base do espaço vetorial real $\mathbb{R}^5$, (v_1', v_2', v_3') uma base do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$ e $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear definida por

$$f(x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4 + x_5v_5) = (x_2 - x_3)v_1' + (x_3 - x_2)v_2' + (x_1 + x_4 + x_5)v_3', \qquad \forall x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}.$$

(a) Diga, justificando, se f é sobrejetiva.

(b) Dê exemplo de um vetor $u \in \mathbb{R}^5$ tal que $u \notin \mathrm{Nuc} f$. Justifique.

(c) Verifique que $v_1 - v_4 \in \mathrm{Nuc} f$.

(d) Dê exemplo de um subespaço W de $\mathbb{R}^5$ tal que

$$W \cap \mathrm{Nuc} f = < v_1 - v_4 > \quad \text{e} \quad \dim(W + \mathrm{Nuc} f) = 4.$$

Resolução:

(a) A aplicação f é sobrejetiva sse $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^3$. Como $\mathrm{Im} f \leq \mathbb{R}^3$, tem-se $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^3$ se e só se $\dim \mathrm{Im} f = \dim \mathbb{R}^3$. Então, para avaliar se f é sobrejetiva, basta determinar $\dim \mathrm{Im} f$.

Uma vez que $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ é uma base de $\mathbb{R}^5$, tem-se $V =< v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 >$. Logo,

$$\mathrm{Im} f =< f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(v_4), f(v_5) > .$$

Considerando que

$$\begin{aligned} < f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(v_4), f(v_5) > &= < v_3', v_1' - v_2', -v_1' + v_2', v_3', v_3' > \\ &= < v_3', v_1' - v_2' > \quad (\text{pois } -v_1' + v_2' = (-1)(v_1' - v_2')), \end{aligned}$$

temos $\mathrm{Im} f =< v_3', v_1' - v_2' >$. Logo, $\dim \mathrm{Im} f \leq 2$ e, portanto, f não é sobrejetiva.

Note-se que a sequência $(v_3', v_1' - v_2')$ é linearmente independente, pois, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \alpha v_3' + \beta(v_1' - v_2') = 0_{\mathbb{R}^3} \quad &\Rightarrow \quad \beta v_1' - \beta v_2' + \alpha v_3' = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\Rightarrow \quad \alpha = \beta = 0 \quad (\text{pois a sequência } (v_1', v_2', v_3') \text{ é linearmente independente}). \end{aligned}$$

Então, como $\mathrm{Im} f =< v_3', v_1' - v_2' >$ e a sequência $(v_3', v_1' - v_2')$ é linearmente independente, $(v_3', v_1' - v_2')$ é uma base de $\mathrm{Im} f$. Assim, $\dim \mathrm{Im} f = 2$.

Resolução alternativa:

Tem-se

$$\begin{aligned} \mathrm{Im} f &= \{f(v) \in \mathbb{R}^3 \,|\, v \in \mathbb{R}^5\} \\ &= \{f(x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4 + x_5v_5) \,|\, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x_2 - x_3)v_1' + (x_3 - x_2)v_2' + (x_1 + x_4 + x_5)v_3' \,|\, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_1v_3' + x_2(v_1' - v_2') + x_3(-v_1' + v_2') + x_4v_3' + x_5v_3' \,|\, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\} \\ &= < v_3', v_1' - v_2', -v_1' + v_2', v_3', v_3' > \\ &= < v_3', v_1' - v_2' > \quad (\text{pois } -v_1' + v_2' = (-1)(v_1' - v_2')). \end{aligned}$$

Logo $\dim \mathrm{Im} f \leq 2$ e, portanto, f não é sobrejetiva.

(b) Por definição de $\mathrm{Nuc} f$, temos $\mathrm{Nuc} f = \{v \in \mathbb{R}^5 \,|\, f(v) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$. Então, como $f(v_1) = v_3'$ e $v_3' \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, conclui-se que $v_1 \notin \mathrm{Nuc} f$.

[Note-se que $v_3' \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, pois v_3' é um elemento da base (v_1', v_2', v_3').]

Resolução alternativa:

Tem-se

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{Nuc}f & = & \{v\in\mathbb{R}^5 \,|\, f(v)=0_{\mathbb{R}^3}\}\\ & = & \{x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3+x_4v_4+x_5v_5 \,|\, f(x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3+x_4v_4+x_5v_5)=0_{\mathbb{R}^3}\}\\ & = & \{x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3+x_4v_4+x_5v_5 \,|\, (x_2-x_3)v_1'+(x_3-x_2)v_2'+(x_1+x_4+x_5)v_3'=0_{\mathbb{R}^3}\}\\ & \overset{(*)}{=} & \{x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3+x_4v_4+x_5v_5 \,|\, x_2-x_3=0 \text{ e } x_3-x_2=0 \text{ e } x_1+x_4+x_5=0\}\\ & = & \{x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3+x_4v_4+x_5v_5 \,|\, x_2=x_3 \text{ e } x_1=-x_4-x_5\}\end{array}$$

Então $v_1 = 1v_1+0v_2+0v_3+0v_4+0v_5 \notin \mathrm{Nuc}f$.

(*) A sequência (v_1', v_2', v_3') é linearmente independente.

(c) Uma vez que $\mathrm{Nuc}f=\{v\in\mathbb{R}^5 \,|\, f(v)=0_{\mathbb{R}^3}\}$, $v_1-v_4\in\mathbb{R}^5$ (v_1, v_4 são elementos de $\mathbb{R}^5$ e $\mathbb{R}^5$ é um espaço vetorial) e

$$f(v_1-v_4)=f(v_1)-f(v_4)=v_3'-v_3'=0_{\mathbb{R}^3},$$

então $v_1-v_4\in\mathrm{Nuc}f$.

(d) Seja $W=<v_1,v_1-v_4>$. A sequência de vetores (v_1,v_1-v_4) é linearmente independente, pois, para quaisquer $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl}\alpha v_1+\beta(v_1-v_4)=0_{\mathbb{R}^5} & \Rightarrow & (\alpha+\beta)v_1-\beta v_4=0_{\mathbb{R}^5}\\ & \overset{(*)}{\Rightarrow} & \alpha+\beta=0 \text{ e } \beta=0\\ & \Rightarrow & \alpha=0 \text{ e } \beta=0.\end{array}$$

(*) A sequência (v_1,v_4) é linearmente independente, pois v_1 e v_4 fazem parte da base (v_1,v_2,v_3,v_4,v_5).

Então, como $W=<v_1,v_1-v_4>$ e a sequência de vetores (v_1,v_1-v_4) é linearmente independente, temos $\dim W=2$.

Facilmente determinamos a dimensão de $\mathrm{Nuc}\, f$, pois $\dim\mathbb{R}^5=\dim\mathrm{Im}f+\dim\mathrm{Nuc}f$, $\dim\mathbb{R}^5=5$ e $\dim\mathrm{Im}f=2$. Logo, $\dim\mathrm{Nuc}f=3$

Como $v_1-v_4\in\mathrm{Nuc}f$ e a sequência (v_1-v_4) é linearmente independente (pois (v_1,v_4) é linearmente independente), existe uma base de $\mathrm{Nuc}f$ que inclui o vetor v_1-v_4; seja (v_1-v_4,u_1,u_2) uma dessas bases. Assim, $\mathrm{Nuc}f=<v_1-v_4,u_1,u_2>$.

Logo

$$W+\mathrm{Nuc}f=<v_1,v_1-v_4>+<v_1-v_4,u_1,u_2>=<v_1,v_1-v_4,u_1,u_2>.$$

Verifiquemos que $\dim W+\mathrm{Nuc}f=4$. No sentido de fazermos a prova por redução ao absurdo, admitamos que $\dim W+\mathrm{Nuc}f\leq 3$. Então a sequência (v_1,v_1-v_4,u_1,u_2) é linearmente dependente e, como (v_1-v_4,u_1,u_2) é linearmente independente, resulta que v_1 é combinação linear de v_1-v_4, u_1 e u_2. Por conseguinte, $v_1\in\mathrm{Nuc}f$, o que contraria o que foi verificado na alínea (a). Portanto $\dim W+\mathrm{Nuc}f=4$.

Então, considerando que

$$\dim(W+\mathrm{Nuc}f)=\dim W+\dim\mathrm{Nuc}f-\dim(W\cap\mathrm{Nuc}f),$$

$\dim(W+\mathrm{Nuc}f)=4$, $\dim W=2$ e $\dim\mathrm{Nuc}f=3$, tem-se $\dim(W\cap\mathrm{Nuc}f)=1$.

Como $<v_1-v_4>\subseteq W\cap\mathrm{Nuc}f$, $\dim<v_1-v_4>=1$ e $\dim W\cap\mathrm{Nuc}f=1$, conclui-se que

$$W\cap\mathrm{Nuc}f=<v_1-v_4>.$$

Exercício 4.6

Seja $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ a aplicação linear definida por

$$g(1,0,0)=(1,0,1,0),\quad g(0,1,0)=(0,1,-2,0),\quad g(0,0,1)=(1,1,0,0).$$

(a) Determine:

i) $g(2,3,1)$.

ii) $g(-1,2,0)$.

(b) Determine uma base de Img e indique a característica de g.

(c) Diga, justificando, se g é injetiva.

Resolução:

(a) i. Uma vez que

$$(2,3,1) = 2(1,0,0) + 3(0,1,0) + 1(0,0,1)$$

e g é aplicação linear, tem-se

$$\begin{aligned} g(2,3,1) &= 2g(1,0,0) + 3g(0,1,0) + g(0,0,1) \\ &= 2(1,0,1,0) + 3(0,1,-2,0) + 1(1,1,0,0) \\ &= (3,4,-4,0). \end{aligned}$$

(a) ii. Uma vez que

$$(-1,2,0) = (-1)(1,0,0) + 2(0,1,0) + 0(0,0,1)$$

e g é aplicação linear, tem-se

$$\begin{aligned} g(-1,2,0) &= (-1)g(1,0,0) + 2g(0,1,0) + 0g(0,0,1) \\ &= (-1)(1,0,1,0) + 2(0,1,-2,0) + 0(1,1,0,0) \\ &= (-1,2,-5,0). \end{aligned}$$

(b) Considerando que $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, tem-se

$$\mathbb{R}^3 =< (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) >,$$

donde segue que

$$\begin{aligned} \text{Im}g = g(\mathbb{R}^3) &= < g(1,0,0), g(0,1,0), g(0,0,1) > \\ &= < (1,0,1,0),(0,1,-2,0),(1,1,0,0) > . \end{aligned}$$

A sequência $((1,0,1,0),(0,1,-2,0),(1,1,0,0))$ é linearmente independente, pois é uma sequência com 3 vetores e

$$car \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3,$$

tal como se pode confirmar nos cálculos abaixo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3 - l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3 - l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então $((1,0,1,0),(0,1,-2,0),(1,1,0,0))$ é uma base de Img e $c_g = \dim \text{Im}g = 3$.

(c) A aplicação linear g é injetiva se e só se $\text{Nuc}\, g = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, ou seja, se e só se $\dim \text{Nuc}\, g = 0$.

Ora, como

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Im}\, g + \dim \text{Nuc}\, g,$$

e $\dim \text{Im}\, g = 3$, conclui-se que $\dim \text{Nuc}\, g = 0$. Portanto, g é injetiva.

Exercício 4.7

Diga, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras para quaisquer espaços vetoriais reais $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, $n, m \in \mathbb{N}$, e para quaisquer aplicações lineares $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

(a) Se $(v_1, ..., v_n)$ é uma base de $\mathbb{R}^n$, então $(f(v_1), ..., f(v_n))$ é base de $\mathbb{R}^n$.

(b) Se g é sobrejetiva, então $n \geq m$.

(c) Se $n \geq m$, então g é sobrejetiva.

(d) Se $(v_1, ..., v_n)$ é uma base de $\mathbb{R}^n$ e $g(v_i) \neq g(v_j)$ sempre que $i \neq j$ $(i, j \in \{1, ..., n\})$, então g é injetiva.

(e) Se g é sobrejetiva, então g é injetiva.

(f) Se g é injetiva, então g é sobrejetiva.

(g) f é injetiva se e só f é sobrejetiva.

Resolução:

(a) A afirmação é falsa.

Contra-exemplo: Consideremos o espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$, a base $((1,0),(0,1))$ de $\mathbb{R}^2$ e a aplicação linear $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $g(1,0) = (0,0)$ e $g(0,1) = (1,0)$. Nas condições indicadas, a sequência $(f(1,0), f(0,1))$ não é uma base de $\mathbb{R}^2$, pois a sequência $((0,0),(1,0))$ não é linearmente independente.

(b) A afirmação é verdadeira.

Se g é sobrejetiva, então $\operatorname{Im} g = V'$, donde $\dim \operatorname{Im} g = \dim V' = m$. Por outro lado, como $(v_1, \ldots, v_n)$ é uma base de V, tem-se $V =< v_1, \ldots, v_n >$, pelo que $\operatorname{Im} g =< g(v_1), \ldots, g(v_n) >$. Logo, $\dim \operatorname{Im} g \leq n$ e, portanto, $m \leq n$.

(c) A afirmação é falsa.

Contra-exemplo: Consideremos os espaços vetoriais reais $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, a base de $\mathbb{R}^3$ a seguir indicada

$$((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$$

e a aplicação linear $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(1,0,0) = (0,0)$, $g(0,1,0) = (0,0)$ e $g(0,0,1) = (0,0)$. Nas condições indicadas, tem-se $\dim \mathbb{R}^3 = 3 > 2 = \dim \mathbb{R}^2$ e, obviamente, g não é sobrejetiva, pois $\operatorname{Im} g = \{(0,0)\} \neq \mathbb{R}^2$.

(d) A afirmação é falsa.

Contra-exemplo: Consideremos o espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$, a base $((1,0),(0,1))$ de $\mathbb{R}^2$ e a aplicação linear $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(1,0) = (1,0)$ e $g(0,1) = (2,0)$. Nas condições indicadas, tem-se $g(1,0) \neq g(0,1)$, mas g não é injetiva, pois $(2,0) \neq (0,1)$ e $g(2,0) = 2g(1,0) = 2(1,0) = g(0,1)$.

(e) A afirmação é falsa.

Contra-exemplo: Consideremos os espaços vetoriais reais $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, a base de $\mathbb{R}^3$ a seguir indicada

$$((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$$

e a aplicação linear $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(1,0,0) = (1,0)$, $g(0,1,0) = (1,0)$ e $g(0,0,1) = (0,1)$. Nas condições indicadas, tem-se

$$\operatorname{Im} g =< g(1,0,0), g(0,1,0), g(0,0,1) >=< (1,0),(0,1) >= \mathbb{R}^2$$

e, portanto, g é sobrejetiva. No entanto, g não é injetiva, uma vez que $(1,0,0) \neq (0,0,1)$ e $g(1,0,0) = g(0,1,0)$.

(f) A afirmação é falsa.

Contra-exemplo: Consideremos os espaços vetoriais reais $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, a base $((1,0),(0,1))$ de $\mathbb{R}^2$ e a aplicação linear $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $g(1,0) = (1,0,0)$ e $g(0,1) = (0,1,0)$. Claramente, g não é sobrejetiva, pois $\dim \operatorname{Im} g \leq 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$. No entanto, g é injetiva. De facto, como a sequência $((1,0,0),(0,1,0))$ é linearmente independente, tem-se $\dim \operatorname{Im} g = 2$. Então, atendendo a que $\dim \mathbb{R}^2 = \dim \operatorname{Im} g + \dim \operatorname{Nuc} g$, tem-se $\dim \operatorname{Nuc} g = 0$, o que significa que g é injetiva.

(g) A afirmação é verdadeira.

Admitamos que f é injetiva. Então $\operatorname{Nuc} f = \{0_V\}$, pelo que $\dim \operatorname{Nuc} f = 0$. Como

$$\dim V = \dim \operatorname{Nuc} f + \dim \operatorname{Im} f,$$

segue que $\dim \operatorname{Im} f = \dim V$. Como $\operatorname{Im} f \leq V$, conclui-se que $\operatorname{Im} f = V$. Logo f é sobrejetiva.
Reciprocamente, admitamos que f é sobrejetiva. Então $\operatorname{Im} f = V$, pelo que $\dim \operatorname{Im} f = \dim V$. Como $\dim V = \dim \operatorname{Nuc} f + \dim \operatorname{Im} f$, segue que $\dim \operatorname{Nuc} f = 0$, ou seja $\operatorname{Nuc} f = \{0_V\}$. Portanto f é injetiva.

Exercício 4.8

Considere as aplicações lineares

$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z,w) = (x-y, x+w, y+z)$, $\forall (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$;

$g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida por $g(x,y,z,w) = (x, x+z, -w, 2y+z)$, $\forall (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$;

$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $h(1,1,1) = (2,0,1)$, $h(1,1,0) = (1,0,-1)$, $h(1,0,0) = (0,0,2)$;

$t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por $t(x,y,z) = (x-y, 0, 0, x+y+z)$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$;

e as bases

$B_1 = ((0,0,0,1),(0,0,1,1),(0,1,1,1),(1,1,1,1))$ e

$B_2 = ((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$ de $\mathbb{R}^4$;

$B_1' = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ e

$B_2' = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$.

Determine:

(a) $M(f; B_1, B_1')$. (b) $M(f; B_1, B_2')$. (c) $M(g; B_2, B_1)$. (d) $M(g; B_1, B_2)$.
(e) $M(h; B_1', B_1')$. (f) $M(h; B_1', B_2')$. (g) $M(t; B_2', B_2)$. (h) $M(t; B_1', B_1)$.

Resolução:

(a) Tem-se

$$\begin{aligned}
f(0,0,0,1) &= (0,1,0) = 0(1,1,1) + 1(1,1,0) - 1(1,0,0)\\
f(0,0,1,1) &= (0,1,1) = 1(1,1,1) + 0(1,1,0) - 1(1,0,0)\\
f(0,1,1,1) &= (-1,1,2) = 2(1,1,1) - 1(1,1,0) - 2(1,0,0)\\
f(1,1,1,1) &= (0,2,2) = 2(1,1,1) + 0(1,1,0) - 2(1,0,0).
\end{aligned}$$

Logo,

$$M(f; B_1, B_1') = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

(b) Tem-se

$$\begin{aligned}
f(0,0,0,1) &= (0,1,0) = 0(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1)\\
f(0,0,1,1) &= (0,1,1) = 0(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1)\\
f(0,1,1,1) &= (-1,1,2) = -1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 2(0,0,1)\\
f(1,1,1,1) &= (0,2,2) = 0(1,0,0) + 2(0,1,0) + 2(0,0,1).
\end{aligned}$$

Logo,

$$M(f; B_1, B_2') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(c) Tem-se

$$\begin{aligned}
g(1,0,0,0) &= (1,1,0,0) = 0(0,0,0,1) - 1(0,0,1,1) + 0(0,1,1,1) + 1(1,1,1,1)\\
g(0,1,0,0) &= (0,0,0,2) = 2(0,0,0,1) + 0(0,0,1,1) + 0(0,1,1,1) + 0(1,1,1,1)\\
g(0,0,1,0) &= (0,1,0,1) = 1(0,0,0,1) - 1(0,0,1,1) + 1(0,1,1,1) + 0(1,1,1,1)\\
g(0,0,0,1) &= (0,0,-1,0) = 1(0,0,0,1) - 1(0,0,1,1) + 0(0,1,1,1) + 0(1,1,1,1).
\end{aligned}$$

Logo,

$$M(g;B_2,B_1) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(d) Tem-se

$$\begin{aligned}
g(0,0,0,1) &= (0,0,-1,0) = 0(1,0,0,0) + 0(0,1,0,0) - 1(0,0,1,0) + 0(0,0,0,1)\\
g(0,0,1,1) &= (0,1,-1,1) = 0(1,0,0,0) + 1(0,1,0,0) - 1(0,0,1,0) + 1(0,0,0,1)\\
g(0,1,1,1) &= (0,1,-1,3) = 0(1,0,0,0) + 1(0,1,0,0) - 1(0,0,1,0) + 3(0,0,0,1)\\
g(1,1,1,1) &= (1,2,-1,3) = 1(1,0,0,0) + 2(0,1,0,0) - 1(0,0,1,0) + 3(0,0,0,1).
\end{aligned}$$

Logo,

$$M(g;B_1,B_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ -1 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

(e) Tem-se

$$\begin{aligned}
h(1,1,1) &= (2,0,1) = 1(1,1,1) - 1(1,1,0) + 2(1,0,0)\\
h(1,1,0) &= (1,0,-1) = -1(1,1,1) + 1(1,1,0) + 1(1,0,0)\\
h(1,0,0) &= (0,0,2) = 2(1,1,1) - 2(1,1,0) + 0(1,0,0).
\end{aligned}$$

Logo,

$$M(h;B_1',B_1') = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & -2\\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(f) Tem-se

$$\begin{aligned}
h(1,0,0) &= (0,0,2) = 2(1,1,1) - 2(1,1,0) + 0(1,0,0)\\
h(0,1,0) &= h(0(1,1,1) + 1(1,1,0) - 1(1,0,0))\\
&= h(1,1,0) - h(1,0,0)\\
&= (1,0,-1) - (0,0,2)\\
&= (1,0,-3)\\
&= -3(1,1,1) + 3(1,1,0) + 1(1,0,0)\\
h(0,0,1) &= h(1(1,1,1) - 1(1,1,0) + 0(1,0,0))\\
&= h(1,1,1) - h(1,1,0)\\
&= (2,0,1) - (1,0,-1)\\
&= (1,0,2)\\
&= 2(1,1,1) - 2(1,1,0) + 1(1,0,0).
\end{aligned}$$

Logo,

$$M(h;B_2',B_1') = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2\\ -2 & 3 & -2\\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(g) Tem-se

$$\begin{aligned}
t(1,0,0) &= (1,0,0,1) = 1(1,0,0,0) + 0(0,1,0,0) + 0(0,0,1,0) + 1(0,0,0,1)\\
t(0,1,0) &= (-1,0,0,1) = -1(1,0,0,0) + 0(0,1,0,0) + 0(0,0,1,0) + 1(0,0,0,1)\\
t(0,0,1) &= (0,0,0,1) = 0(1,0,0,0) + 0(0,1,0,0) + 0(0,0,1,0) + 1(0,0,0,1).
\end{aligned}$$

Logo,

$$M(t;B_2',B_2)=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

(h) Tem-se

$$\begin{aligned}t(1,1,1)&=(0,0,0,3)=3(0,0,0,1)+0(0,0,1,1)+0(0,1,1,1)+0(1,1,1,1)\\t(1,1,0)&=(0,0,0,2)=2(0,0,0,1)+0(0,0,1,1)+0(0,1,1,1)+0(1,1,1,1)\\t(1,0,0)&=(1,0,0,1)=1(0,0,0,1)+0(0,0,1,1)-1(0,1,1,1)+1(1,1,1,1).\end{aligned}$$

Logo,

$$M(t;B_1',B_1)=\begin{bmatrix}3&2&1\\0&0&0\\0&0&-1\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Exercício 4.9

Considere as bases $B=(v_1,v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ e $B'=(v_1',v_2',v_3')$ de $\mathbb{R}^3$ em que $v_1=(-1,1)$, $v_2=(1,1)$ e $v_1'=(1,1,1)$, $v_2'=(0,1,1)$, $v_3'=(0,0,1)$. Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$M(f;B,B')=\begin{bmatrix}-1&1\\0&-1\\-2&1\end{bmatrix}.$$

Determine:

(a) $f(2,3)$. (b) $f(-1,1)$. (c) $f(0,0)$. (d) $f(0,2)$. (e) $f(a,b)$, para todo $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

Resolução:

(a) Seja $v=(2,3)$. Uma vez que

$$v=(2,3)=\frac{1}{2}(-1,1)+\frac{5}{2}(1,1),$$

o vetor coluna de v na base $\mathcal{B}$ é $[v]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{5}{2}\end{bmatrix}$. Logo, o vetor coluna de $f(v)$ na base B' é

$$M(f;B,B')[v]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}-1&1\\0&-1\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{5}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-\frac{5}{2}\\\frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

e, portanto,

$$f(2,3)=2(1,1,1)-\frac{5}{2}(0,1,1)+\frac{3}{2}(0,0,1)=(2,-\frac{1}{2},1).$$

(b) Seja $v=(-1,1)$. Uma vez que

$$v=(-1,1)=1(-1,1)+0(1,1),$$

o vetor coluna de v na base $\mathcal{B}$ é $[v]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$. Logo, o vetor coluna de $f(v)$ na base B' é

$$M(f;B,B')[v]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}-1&1\\0&-1\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\-2\end{bmatrix}$$

e, portanto,
$$f(-1,1) = -1(1,1,1) + 0(0,1,1) + -2(0,0,1) = (-1,-1,-3).$$

(c) Seja $v = (0,0)$. Uma vez que
$$v = (0,0) = 0(-1,1) + 0(1,1),$$
o vetor coluna de v na base $\mathcal{B}$ é $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Logo, o vetor coluna de $f(v)$ na base B' é
$$M(f;B,B')[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
e, portanto,
$$f(0,0) = 0(1,1,1) + 0(0,1,1) + 0(0,0,1) = (0,0,0).$$
Observação: Sendo V, V' espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $f : V \to V'$ uma aplicação linear, tem-se sempre $f(0_V) = 0_{V'}$.

(d) Seja $v = (0,2)$. Uma vez que
$$v = (0,2) = 1(-1,1) + 1(1,1),$$
o vetor coluna de v na base $\mathcal{B}$ é $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Logo, o vetor coluna de $f(v)$ na base B' é
$$M(f;B,B')[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$
e, portanto,
$$f(0,2) = 0(1,1,1) - (0,1,1) - (0,0,1) = (0,-1,-2).$$

(e) Para qualquer $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, tem-se
$$v = (a,b) = \frac{b-a}{2}(-1,1) + \frac{a+b}{2}(1,1),$$
pelo que o vetor coluna de v na base $\mathcal{B}$ é $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{b-a}{2} \\ \frac{a+b}{2} \end{bmatrix}$. Logo, o vetor coluna de $f(v)$ na base B' é
$$M(f;B,B')[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{b-a}{2} \\ \frac{a+b}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ \frac{-b-a}{2} \\ \frac{-b+3a}{2} \end{bmatrix}$$
e, portanto,
$$f(0,2) = a(1,1,1) + \left(\frac{-b-a}{2}\right)(0,1,1) + \left(\frac{-b+3a}{2}\right)(0,0,1) = \left(a, \frac{-b+a}{2}, -b+2a\right).$$

Exercício 4.10

Sejam $B = (v_1, v_2, v_3)$ uma base do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$ e $B' = (v_1', v_2', v_3', v_4')$ uma base do espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$. Sejam $f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ as aplicações lineares definidas, respectivamente, por
$$f(v_1) = 2v_1' + v_3' + v_4', \quad f(v_2) = v_2' + 2v_3', \quad f(v_3) = 2v_1' - 2v_2' - 3v_3' + v_4';$$
$$g(x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3) = x_1v_1' - (x_1 + x_3)v_2' + (x_2 - x_3)v_3' + x_2v_4', \quad \forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R};$$

$$M(h;B,B') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine:

i. $M(f;B,B')$. ii. $M(g;B,B')$.

(b) Determine:

i. $h(v_3)$. ii. $h(v_1+2v_2-v_3)$.

(c) Diga, justificando, se h é monomorfismo.

Resolução:

(a) i. Considerando a definição de f, tem-se

$$M(f;B,B') = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) ii. Uma vez que

$$g(v_1) = v_1' - v_2', \quad g(v_2) = v_3' + v_4', \quad g(v_3) = v_2' - v_3',$$

então

$$M(g;B,B') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) i. Da matriz $M(h;B,B')$, obtemos $h(v_3) = -v_1' + v_2' + 2v_3' + v_4'$.

(b) ii. Da matriz $M(h;B,B')$, obtemos

$$\begin{aligned} h(v_1) &= 0v_1' + 0v_2' + 0v_3' \\ h(v_2) &= 2v_2' + v_3' \\ h(v_3) &= -v_1' + v_2' + 2v_3' + v_4', \end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{aligned} h(v_1+2v_2-v_3) &= h(v_1) + 2h(v2) - h(v_3) \\ &= 0_{V'} + 2(2v_2' + v_3') - (-v_1' + v_2' + 2v_3' + v_4') \\ &= v_1' + 3v_2' - v_4' \end{aligned}$$

Resolução alternativa: O vetor coluna de $v = v_1+2v_2-v_3$ na base $\mathcal{B}$ é $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Então o vetor coluna de $h(v_1+2v_2-v_3)$ na base B' é

$$M(h;B,B')[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

pelo que

$$h(v_1+2v_2-v_3) = v_1' + 3v_2' - v_4'.$$

(c) A aplicação h é um monomorfismo se e só se $\text{Nuc}h = \{v \in \mathbb{R}^3 \,|\, h(v) = 0_{\mathbb{R}^4}\} = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Ora, da matriz $M(h;B,B')$ obtem-se $h(v_1) = 0v'_1 + 0'v_2 + 0v'_3 + 0v'_4 = 0_{\mathbb{R}^4}$. Como v_1 é um vetor da base (v_1, v_2, v_3), então $v_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, pois (v_1, v_2, v_3) é linearmente independente. Logo $v_1 \in \text{Nuc}h \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ e, portanto, h não é um monomorfismo.

Resolução alternativa: A aplicação h é um monomorfismo se e só se $\text{Nuc}h = \{v \in 0_{\mathbb{R}^3} \,|\, h(v) = 0_{\mathbb{R}^4}\} = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Uma vez que (v_1, v_2, v_3) é uma base de $\mathbb{R}^3$, para qualquer $v \in \mathbb{R}^3$, tem-se $v = av_1 + b_2 + cv_3$, para alguns $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\text{Nuc}h &= \{v \in \mathbb{R}^3 \,|\, h(v) = 0_{\mathbb{R}^4}\} \\
&= \{av_1 + b_2 + cv_3 \in \mathbb{R}^3 \,|\, a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } h(av_1 + b_2 + cv_3) = 0_{\mathbb{R}^4}\} \\
&= \left\{ av_1 + b_2 + cv_3 \in \mathbb{R}^3 \,|\, a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } M(h;B,B') \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

No sentido de determinar o conjunto anterior, vamos resolver o sistema $M(h;B,B') \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz simples do sistema, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \to l_2 + l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_4 \to l_4 - l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 4.11

Considere, no espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, a base $B = ((1,0,1), (1,1,0), (0,1,1))$ e o endomorfismo f definido por $f(1,0,1) = (1,-1,1)$, $f(1,1,0) = (2,1,1)$, $f(0,1,1) = (1,0,0)$.

(a) Determine $M(f;B,B)$.

(b) Determine $f(a,b,c)$, para todo $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

(c) Mostre que f é um automorfismo de $\mathbb{R}^3$ e determine f^{-1}.

Resolução:

(a) Tem-se

$$\begin{aligned}
&f(1,0,1) = (1,-1,1) = \tfrac{3}{2}(1,0,1) - \tfrac{1}{2}(1,1,0) - \tfrac{1}{2}(0,1,1), \\
&f(1,1,0) = (2,1,1) = 1(1,0,1) + 1(1,1,0) + 0(0,1,1), \\
&f(0,1,1) = (1,0,0) = \tfrac{1}{2}(1,0,1) + \tfrac{1}{2}(1,1,0) - \tfrac{1}{2}(0,1,1).
\end{aligned}$$

Logo

$$M(f;B,B) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Nota:

$(1,-1,1) = \alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(1,1,0) + \alpha_3(0,1,1) \Rightarrow \alpha_1 = \frac{3}{2}, \alpha_2 = -\frac{1}{2}, \alpha_3 = -\frac{1}{2}$,
$(1,1,0) = \alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(1,1,0) + \alpha_3(0,1,1) \Rightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0$,
$(0,1,1) = \alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(1,1,0) + \alpha_3(0,1,1) \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{2}, \alpha_2 = \frac{1}{2}, \alpha_3 = -\frac{1}{2}$.

(b) Para qualquer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, tem-se

$$(a,b,c) = \left(\frac{a-b+c}{2}\right)(1,0,1) + \left(\frac{a+b-c}{2}\right)(1,1,0) + \left(\frac{-a+b+c}{2}\right)(0,1,1),$$

pelo que o vetor coluna de $v = (a, b, c)$ na base $\mathcal{B}$ é

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{a-b+c}{2} \\ \frac{a+b-c}{2} \\ \frac{-a+b+c}{2} \end{bmatrix}.$$

Então o vetor coluna de $f(a, b, c)$ na base B é

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a-b+c}{2} \\ \frac{a+b-c}{2} \\ \frac{-a+b+c}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2a+c}{2} \\ \frac{2b-c}{2} \\ \frac{-c}{2} \end{bmatrix}$$

e, portanto,

$$f(a, b, c) = \left(\frac{2a+c}{2}\right)(1, 0, 1) + \left(\frac{2b-c}{2}\right)(1, 1, 0) + \left(\frac{-c}{2}\right)(0, 1, 1) = (a + b, b - c, a)$$

(c) A aplicação linear f é um automorfismo se f é bijetiva, ou seja, se f é injetiva e sobrejetiva. Considerando que f é injetiva se e só se $\mathrm{Nuc} f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ e que f é sobrejetiva se e só se $\mathrm{Imf} f = \mathbb{R}^3$, comecemos por determinar a dimensão dos subespaços vetoriais $\mathrm{Im} f$ e $\mathrm{Nuc} f$.

Considerando que $\dim Imf = car(M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}))$, então dos cálculos seguintes

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 + \frac{1}{3} l_1 \\ l_3 \to l_3 + \frac{1}{3} l_1}]{} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3 - \frac{1}{4} l_2]{} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

conclui-se que $\dim Imf = 3$, pois $car(M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})) = 3$. Como $\dim Imf = \dim \mathbb{R}^3$, f é sobrejetiva. Por outro lado, de $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathrm{Nuc} f + \dim Imf$, segue que $\dim \mathrm{Nuc} f = 0$ e, portanto, f é injetiva. Assim, f é bijetiva e, portanto, é um automorfismo.

Como f é bijetiva, f é invertível e tem-se

$$M(f^{-1}; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix}$$

Então, considerando que o vetor coluna de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ na base $\mathcal{B}$ é

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{a-b+c}{2} \\ \frac{a+b-c}{2} \\ \frac{-a+b+c}{2} \end{bmatrix},$$

o vetor coluna de $f^{-1}(a, b, c,)$ na base B é

$$M(f^{-1}; \mathcal{B}, \mathcal{B})[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a-b+c}{2} \\ \frac{a+b-c}{2} \\ \frac{-a+b+c}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c-b}{2} \\ \frac{b+c}{2} \\ \frac{-b+2a-3c}{2} \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\begin{aligned} f^{-1}(a, b, c) &= \left(\tfrac{c-b}{2}\right)(1, 0, 1) + \left(\tfrac{b+c}{2}\right)(1, 1, 0) + \left(\tfrac{-b+2a-3c}{2}\right)(0, 1, 1) \\ &= (c, a - c, a - b - c). \end{aligned}$$

Exercício 4.12

Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$ e seja B base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Seja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear tal que $M(g; B, B) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

(a) Determine $g(-1, 1, 4)$ e $g(1, 1, 0)$.

(b) Mostre que:

i. $\dim \mathrm{Im} g = 2$.

ii. $\mathrm{Nuc} g =< (0, 1, 2) >$.

(c) Indique um vetor $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $v \neq (1, 1, 0)$ e $g(v) = (0, 0, 1)$. Justifique.

Resolução:

(a) Uma vez que

$$(-1, 1, 4) = -1(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 4(0, 0, 1),$$

o vetor coluna de $(1-, 1, 4)$ na base $\mathcal{B}$ é

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Logo o vetor coluna de $g(1-, 1, 4)$ na base $\mathcal{B}$ é

$$M(g; \mathcal{B}, \mathcal{B})[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

pelo que

$$g(-1, 1, 4) = 0(1, 0, 0) + 0(0, 1, 0) - 1(0, 0, 1) = (0, 0, -1).$$

Uma vez que

$$(1, 1, 0) = 1(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1),$$

o vetor coluna de $(1, 1, 0)$ na base $\mathcal{B}$ é

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo o vetor coluna de $g(1, 1, 0)$ na base $\mathcal{B}$ é

$$M(g; \mathcal{B}, \mathcal{B})[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

pelo que

$$g(1, 1, 0) = 0(1, 0, 0) + 0(0, 1, 0) + 1(0, 0, 1) = (0, 0, 1).$$

(b) i. Tem-se $\dim Img = car(M(g; \mathcal{B}, \mathcal{B})$. Então de

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3 + \frac{1}{2} l_1]{} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

conclui-se que $\dim Img = 2$.

(b) ii. Por definição, tem-se $\mathrm{Nuc}\, g = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, g(a,b,c) = (0,0,0)\}$. Pretendemos mostrar que $\mathrm{Nuc}\, g =< (0,1,2) >$.

Como $\dim \mathbb{R}^3 = \dim Img + \dim \mathrm{Nuc}\, g$, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ e $\dim Img = 2$, temos $\dim \mathrm{Nuc}\, g = 1$. Além disso, facilmente se verifica que $(0,1,2) \in \mathrm{Nuc}\, g$. De facto, como

$$(0,1,2) = 0(1,0,0) + 1(0,1,0) + 2(0,0,1),$$

o vetor coluna de $(0,1,2)$ na base $\mathcal{B}$ é

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Logo o vetor coluna de $g(0,1,2)$ na base B é

$$M(g;\mathcal{B},\mathcal{B})[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pelo que

$$g(0,1,2) = 0(1,0,0) + 0(0,1,0) + 0(0,0,1) = (0,0,0).$$

Assim, $(0,1,2) \in \mathrm{Nuc}\, g$ e, por conseguinte, $< (0,1,2) > \subseteq \mathrm{Nuc}\, g$. Então, considerando que $\dim < (0,1,2) >= \dim \mathrm{Nuc}\, g$, conclui-se que $\mathrm{Nuc}\, g =< (0,1,2) >$.

(c) Sejam V, V' espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$, $f : V \to V'$ uma aplicação linear, $u \in V$ e $v' \in V'$. Se $f(u) = v'$, então $\{v \in V : f(v) = v'\} = \{u + x \,|\, x \in \mathrm{Nuc}(f)\}$.

Da alínea (a) sabe-se que $g(1,1,0) = (0,0,1)$ e da alínea (b) sabe-se que $(0,1,2) \in \mathrm{Nuc}\, g$. Logo, se $v = (1,1,0) + (0,1,2) = (1,2,2)$, tem-se $g(v) = (0,0,1)$.

Exercício 4.13

Sejam $B = (v_1, v_2, v_3)$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e $B' = (v_1', v_2', v_3', v_4')$ uma base de $\mathbb{R}^4$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ a aplicação linear tal que

$$M(f;B,B') = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine:

(a) $\mathrm{Im} f$. (b) $\mathrm{Nuc} f$.

Resolução:

(a) Uma vez que (v_1, v_2, v_3) é uma base de $\mathbb{R}^3$, então $\mathbb{R}^3 =< v_1, v_2, v_3 >$. Logo,

$$\begin{aligned} \mathrm{Im} f &= f(\mathbb{R}^3) =< f(v_1), f(v_2), f(v_3) > \\ &=< v_1' + v_3' + 2v_4', 3v_1' + 2v_2' + v_3' + 4v_4', v_1' + v_2' + v_4' > \\ &= \{\alpha_1(v_1' + v_3' + 2v_4') + \alpha_2(3v_1' + 2v_2' + v_3' + 4v_4') + \alpha_3(v_1' + v_2' + v_4') \,|\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Resolução alternativa:

$$\begin{aligned} \mathrm{Im} f &= f(\mathbb{R}^3) = \{f(v) \,|\, v \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3) \in \mathbb{R}^4 \,|\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \alpha_3 f(v_3) \in \mathbb{R}^4 \,|\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\alpha_1(v_1' + v_3' + 2v_4') + \alpha_2(3v_1' + 2v_2' + v_3' + 4v_4') + \alpha_3(v_1' + v_2' + v_4') \in \mathbb{R}^4 \,|\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\} \\ &=< v_1' + v_3' + 2v_4', 3v_1' + 2v_2' + v_3' + 4v_4', v_1' + v_2' + v_4' > . \end{aligned}$$

(b) Tem-se

$$\begin{aligned}\mathrm{Nuc}f &= \{v \in \mathbb{R}^3 \,|\, f(v) = 0_{\mathbb{R}^4}\}\\ &= \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \in \mathbb{R}^3 \,|\, f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3) = 0_{\mathbb{R}^4}\}\\ &= \left\{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \in \mathbb{R}^3 \,|\, M(f;B,B')\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}.\end{aligned}$$

Então, no sentido de se determinar Nuc$f$, vamos resolver o sistema

$$M(f;B,B')\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $M(f;B,B')$, temos

$$M(f;B,B') = \begin{bmatrix}1&3&1\\0&2&1\\1&1&0\\2&4&1\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_3 \to l_3 - l_1\\ l_4 \to l_4 - 2l_1}]{} \begin{bmatrix}1&3&1\\0&2&1\\0&-2&-1\\0&-2&-1\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_3 \to l_3 + l_2\\ l_4 \to l_4 + l_2}]{} \begin{bmatrix}1&3&1\\0&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[l_1 \to l_1 - \frac{3}{2}l_2]{} \begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} = U$$

O sistema homogéneo com matriz simples U, e equivalente ao sistema inicial, é o sistema

$$\begin{cases}\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_3 = 0\\ 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0\end{cases}$$

donde se obtem

$$\begin{cases}\alpha_1 = \frac{1}{2}\alpha_3\\ \alpha_2 = -\frac{1}{2}\alpha_3\end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathrm{Nuc}f &= \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \in \mathbb{R}^3 \,|\, \alpha_1 = \tfrac{1}{2}\alpha_3, \alpha_2 = -\tfrac{1}{2}\alpha_3\}\\ &= \{\tfrac{1}{2}\alpha_3 v_1 + -\tfrac{1}{2}\alpha_3 v_2 + \alpha_3 v_3 \in \mathbb{R}^3 \,|\, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}\\ &= \{\alpha_3(\tfrac{1}{2}v_1 + -\tfrac{1}{2}v_2 + v_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}\\ &= <\tfrac{1}{2}v_1 - \tfrac{1}{2}v_2 + v_3>.\end{aligned}$$

Exercício 4.14

Considere as aplicações lineares $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definidas, respectivamente, por

$f(x,y,z) = (2x+z, x+2z)$, $g(x,y,z) = (x, x-y-z)$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$;
$h(a,b) = (2a, a-b, a+b)$, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Sendo B a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e B' a base canónica de $\mathbb{R}^2$, determine:

(a) $M(f+g;B,B')$.

(b) $M(h \circ f;B,B)$.

(c) $M((f+g)\circ(3h);B',B')$.

Resolução:

(a) Uma vez que

$$M(f+g;B,B') = M(f;B,B') + M(g;B,B'),$$

comecemos por determinar as matrizes $M(f;B,B')$ e $M(g;B,B')$.

Tem-se

$$\begin{array}{l} f(1,0,0) = (2,1) = 2(1,0) + 1(0,1) \\ f(0,1,0) = (0,0) = 0(1,0) + 0(0,1) \\ f(0,0,1) = (1,2) = 1(1,0) + 2(0,1) \end{array},$$

pelo que

$$M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Considerando que

$$\begin{array}{l} g(1,0,0) = (1,1) = 1(1,0) + 1(0,1) \\ g(0,1,0) = (0,-1) = 0(1,0) - (0,1) \\ g(0,0,1) = (0,-1) = 0(1,0) - 1(0,1) \end{array},$$

temos

$$M(g;\mathcal{B},\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$M(f+g;B,B') = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Considerando que $M(h \circ f;B,B) = M(h;B',B)M(f;B,B')$, comecemos por determinar as matrizes $M(h;B',B)$ e $M(f;B,B')$.

Na alínea anterior já determinámos $M(f;B,B')$, pelo que resta determinar $M(h;B',B)$.

Tem-se

$$h(1,0) = (2,1,1) = 2(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1),$$
$$h(0,1) = (0,-1,1) = 0(1,0,0) - 1(0,1,0) + 1(0,0,1),$$

pelo que

$$M(h;\mathcal{B}',\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$M(h \circ f;B,B) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(c) Temos

$$\begin{aligned} M((f+g)\circ(3h);B',B') &= M(f+g;B,B')M(3h;B',B) \\ &= M(f+g;B,B')(3M(h;B',B)) \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Exercício 4.15

Considere, em $\mathbb{R}^3$, as bases $B = (v_1, v_2, v_3)$ e $B' = (v_1', v_2', v_3')$ em que

$$v_1 = (1,1,2), v_2 = (1,1-1), v_3 = (1,0,0)$$

e

$$v_1' = (0,0,1), v_2' = (0,1,1), v_3' = (1,1,1).$$

(a) Determine $M(id_{\mathbb{R}^3}; B, B')$.

(b) Escreva $3v_1 + 2v_2 - v_3$ como combinação linear de v_1', v_2', v_3'.

Resolução:

(a) Temos

$$id_{\mathbb{R}^3}(v_1) = id_{\mathbb{R}^3}(1,1,2) = (1,1,2) = 1(0,0,1) + 0(0,1,1) + 1(1,1,1),$$
$$id_{\mathbb{R}^3}(v_2) = id_{\mathbb{R}^3}(1,1,-1) = (1,1,-1) = -2(0,0,1) + 0(0,1,1) + 1(1,1,1),$$
$$id_{\mathbb{R}^3}(v_3) = id_{\mathbb{R}^3}(1,0,0) = (1,0,0) = 0(0,0,1) - 1(0,1,1) + 1(1,1,1),$$

donde

$$M(id_{\mathbb{R}^3}; B, B') = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Considerando que

$$3v_1 + 2v_2 - v_3 = id_{\mathbb{R}^3}(3v_1 + 2v_2 - v_3),$$

vamos determinar $id_{\mathbb{R}^3}(3v_1 + 2v_2 - v_3)$ recorrendo à matriz de mudança de base $M(id_{\mathbb{R}^3}; B, B')$, no sentido de obtermos $3v_1 + 2v_2 - v_3$ escrito como combinação linear de v_1', v_2', v_3'.

Uma vez que o vetor coluna de $v = 3v_1 + 2v_2 - v_3$ na base B é

$$[v]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

então

$$M(id_{\mathbb{R}^3}; B, B')[v]_B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

é o vetor coluna de $id_{\mathbb{R}^3}(3v_1 + 2v_2 - v_3)$ na base B'. Assim,

$$3v_1 + 2v_2 - v_3 = id_{\mathbb{R}^3}(3v_1 + 2v_2 - v_3) = -v_1' + v_2' + 4v_3'.$$

Exercício 4.16

Sejam $B = ((1,1),(1,0))$ uma base de $\mathbb{R}^2$, $B' = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$M(g; B, B') = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine:

(a) $M(g; B_1, B_1')$ onde B_1 é a base canónica de $\mathbb{R}^2$ e B_1' é a base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(b) $M(g; B_2, B')$ onde $B_2 = ((0,1),(2,1))$.

Resolução:

(a) Considerando que

$$M(g; B_1, B_1') = M(id_{\mathbb{R}^3}; B', B_1')M(g; B, B')M(id_{\mathbb{R}^2}; B_1, B),$$

determinemos as matrizes $M(id_{\mathbb{R}^2}; B_1, B)$ e $M(id_{\mathbb{R}^3}; B', B_1')$.

Como

$$id_{\mathbb{R}^2}(1,0) = (1,0) = 0(1,1) + 1(1,0),$$
$$id_{\mathbb{R}^2}(0,1) = (0,1) = 1(1,1) - 1(1,0),$$

então

$$M(id_{\mathbb{R}^2}; B_1, B) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Atendendo a que

$$id_{\mathbb{R}^3}(1,1,1) = (1,1,1) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1),$$
$$id_{\mathbb{R}^3}(1,1,0) = (1,1,0) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1),$$
$$id_{\mathbb{R}^3}(1,0,0) = (1,0,0) = 1(1,0,0) + 0(0,1,0) + 0(0,0,1),$$

tem-se

$$M(id_{\mathbb{R}^3}; B', B_1') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$M(g; B_1, B_1') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Tem-se

$$M(g; B_2, B') = M(g; B, B')M(id_{\mathbb{R}^2}; B_2, B).$$

Assim, no sentido de determinar $M(g; B_2, B')$, comecemos por determinar a matriz $M(id_{\mathbb{R}^2}; B_2, B)$. Atendendo a que

$$id_{\mathbb{R}^2}(0,1) = (0,1) = 1(1,1) - 1(1,0),$$
$$id_{\mathbb{R}^2}(2,1) = (2,1) = 1(1,1) + 1(1,0),$$

tem-se

$$M(id_{\mathbb{R}^2}; B_2, B) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$M(g; B_2, B') = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 4.17

Sejam B e B' bases de $\mathbb{R}^3$. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$M(f; B, B') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Verifique que f é um isomorfismo.

(b) Determine $M(f^{-1}; B', B)$.

Resolução:

(a) Uma vez que f é uma aplicação linear, para provar que f é um isomorfismo, resta mostrar que f é bijetiva. Uma aplicação é bijetiva se e só se é injetiva e sobrejetiva. Como a dimensão do espaço domínio e do espaço de chegada são iguais, f é sobrejetiva se e só se f é injetiva. Assim, basta mostrar que f é sobrejetiva (ou que f é injetiva).

A aplicação linear f é sobrejetiva se e só se $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^3$, i.e., se e só se $\dim \mathrm{Im} f = \dim \mathbb{R}^3$. Considerando que $\dim \mathrm{Im} f = car M(f; B, B')$, dos cálculos seguintes

$$M(f;B,B') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - 2l_1 \\ l_3 \to l_3 - 3l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

concluímos que $\dim \mathrm{Im} f = 3$, pois $car M(f; B, B') = 3$.

Como $\dim \mathrm{Im} f = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, então f é sobrejetiva. Uma vez que $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Nuc} f$, temos $\dim \mathrm{Nuc} f = 0$ e, portanto, f também é injetiva. Logo, f é um isomorfismo.

(b) Uma vez que f é um isomorfismo, a aplicação f admite inversa e f^{-1} também é um isomorfismo. Tem-se

$$M(f^{-1}; B', B) = (M(f; B, B'))^{-1}.$$

Assim, no sentido de determinar $M(f^{-1}; B', B)$, vamos determinar a matriz inversa de $M(f; B, B')$. Aplicando o algoritmo de Gauss-Jordan à matriz $[M(f; B, B')|I_3]$, temos

$$[M(f;B,B')|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - 2l_1 \\ l_3 \to l_3 - 3l_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - l_3 \\ l_1 \to l_1 + \frac{1}{2}l_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to -\frac{1}{2}l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Logo,

$$M(f^{-1}; B', B) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Exercício 4.18

Sejam $B = (u_1, u_2, u_3)$, $B' = (v_1, v_2, v_3)$ bases de $\mathbb{R}^3$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$M(f;B,B') = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine $f(u_1)$ e $f(2u_2 + 2u_3)$.

(b) Determine $\dim \mathrm{Nuc} f$. Justifique.

(c) Determine $\{v \in \mathbb{R}^3 : f(v) = v_1 + v_3\}$.

(d) Sendo $M(id_{\mathbb{R}^3}; B, B') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, determine $M(f; B', B)$.

Resolução:

(a) Da matriz $M(f; B, B')$ obtemos

$$f(u_1) = 2v_1 + 0v_2 + 2v_3,$$
$$f(u_2) = 1v_1 + 1v_2 + (-1)v_3,$$
$$f(u_3) = 0v_1 + (-1)v_2 + 2v_3.$$

Logo,

$$f(u_1) = 2v_1 + 2v_3,$$
$$f(2u_2 + 2u_3) = 2f(u_2) + 2f(u_3) = 2(v_1 + v_2 - v_3) + 2(-v_2 + 2v_3) = 2v_1 + 2v_3.$$

(b) Uma vez que f tem domínio $\mathbb{R}^3$, tem-se $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathrm{Im}f + \dim \mathrm{Nuc}f$. Então, como $\dim \mathrm{Im}f = car(M(f;B,B'))$, segue que $\dim \mathrm{Nuc}f = 3 - car(M(f;B,B'))$.
Aplicando operações elementares à matriz $M(f;B,B')$, temos

$$M(f;B,B') = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3 - l_1]{} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3 + 2l_1]{} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, temos $car(M(f;B,B')) = 2$, pelo que $\dim \mathrm{Nuc}f = 1$.

(c) Tem-se

$$\begin{aligned} \{v \in \mathbb{R}^3 : f(v) = v_1 + v_3\} &= \{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 \in \mathbb{R}^3 : f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3) = v_1 + v_3\} \\ &= \left\{ \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 \in \mathbb{R}^3 : M(f;B,B') \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Assim, no sentido de determinarmos o conjunto anterior, vamos resolver o sistema representado pela equação matricial

$$M(f;B,B') \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando operações elementares à matriz ampliada $[A|b]$ do sistema, temos

$$\begin{aligned} [A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] &\xrightarrow[l_3 \to l_3 - l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \\ \xrightarrow[l_3 \to l_3 + 2l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] &\xrightarrow[l_1 \to l_1 - l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [U|c]. \end{aligned}$$

O sistema com matriz ampliada $[U|c]$, e equivalente ao sistema inicial, é o sistema

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

donde obtemos

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{2} - \frac{\alpha_3}{2} \\ \alpha_2 = \alpha_3 \end{cases}$$

Logo,

$$\{v \in \mathbb{R}^3 : f(v) = v_1 + v_3\} = \{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 \in \mathbb{R}^3 : \alpha_1 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{\alpha_3}{2} \text{ e } \alpha_2 = \alpha_3\}.$$

(d) Uma vez que $f = id_{\mathbb{R}^3} \circ f \circ id_{\mathbb{R}^3}$, é válida a igualdade seguinte

$$M(f;B',B) = M(id_{\mathbb{R}^3};B',B)M(f;B,B')M(id_{\mathbb{R}^3};B',B).$$

Além disso, temos

$$M(id_{\mathbb{R}^3};B,B') = M(id_{\mathbb{R}^3}^{-1};B,B') = M(id_{\mathbb{R}^3};B,B')^{-1}.$$

Aplicando o algoritmo de Gauss-Jordan à matriz $[M(id_{\mathbb{R}^3};B,B')|I_3]$, temos

$$[M(id_{\mathbb{R}^3};B,B')|I_3] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_3]{} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_2 \to l_2 + 2l_1]{} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 + l_3 \\ l_1 \to l_1 + l_3}]{} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_3 \to -l_3]{} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Assim,

$$M(id_{\mathbb{R}^3};B,B') = M(id_{\mathbb{R}^3};B',B)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

, pelo que

$$M(f;B',B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \\ -3 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

5 Álgebra Vetorial

Exercícios e resoluções

Exercício 5.1

Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ com o produto escalar. Mostre que, para quaisquer $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

(a) $u \mid v = v \mid u$.

(b) $u \mid (v + w) = u \mid v + u \mid w$.

(c) $u \mid \alpha v = \alpha(u \mid v) = (\alpha u) \mid v$.

(d) $0_{\mathbb{R}^n} \mid u = 0 = u \mid 0_{\mathbb{R}^n}$.

(e) $u \mid u \geq 0$ e $u \mid u = 0$ se e só se $u = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Resolução:

(a) Sejam $u = (a_1, \ldots, a_n), v = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Então, por definicão de produto escalar e considerando a comutatividade da multiplicação em $\mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned}
u \mid v &= (a_1, \ldots, a_n) \mid (b_1, \ldots, b_n) \\
&= a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \\
&= b_1 a_1 + \cdots + b_n a_n \\
&= (b_1, \ldots, b_n) \mid (a_1, \ldots, a_n) \\
&= v \mid u.
\end{aligned}$$

(b) Sejam $u = (a_1, \ldots, a_n), v = (b_1, \ldots, b_n), w = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$. Então, por definicão de produto escalar e considerando a associatividade da adição em $\mathbb{R}$ e a distributividade da mutiplicação relativamente à adição, temos:

$$\begin{aligned}
u \mid (v + w) &= (a_1, \ldots, a_n) \mid ((b_1, \ldots, b_n) + (c_1, \ldots, c_n)) \\
&= (a_1, \ldots, a_n) \mid (b_1 + c_1, \ldots, b_n + c_n) \\
&= a_1(b_1 + c_1) + \cdots + a_n(b_n + c_n) \\
&= (a_1 b_1 + a_1 c_1) + \cdots (a_n b_n + a_n c_n) \\
&= (a_1 b_1 + \cdots a_n b_n) + \cdots (a_1 c_1 + \cdots a_n c_n) \\
&= (u \mid v) + (u \mid w).
\end{aligned}$$

(c) Sejam $u = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então, por definicão de produto escalar e considerando a associatividade da multiplicação em $\mathbb{R}$ e a distributividade da mutiplicação relativamente à adição, temos:

$$\begin{aligned} u \mid (\alpha v) &= (a_1, \ldots, a_n) \mid \alpha(b_1, \ldots, b_n) \\ &= (a_1, \ldots, a_n) \mid (\alpha b_1, \ldots, \alpha b_n) \\ &= a_1(\alpha b_1) + \cdots + a_n(\alpha b_n) \\ &= \alpha(a_1 b_1) + \cdots + \alpha(a_n b_n) \\ &= \alpha(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n) \\ &= \alpha(u \mid v). \end{aligned}$$

De modo análogo, prova-se que $(\alpha u) \mid v = \alpha(u \mid v)$.

(d) Sejam $u = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Então

$$u \mid 0_{\mathbb{R}^n} = (a_1, \ldots, a_n) \mid (0, \ldots, 0) = a_1 0 + \cdots a_n 0 = 0.$$

Por (a), também temos $0_{\mathbb{R}^n} \mid u = 0$.

(e) Sejam $u = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Então

$$u \mid u = (a_1, \ldots, a_n) \mid (a_1, \ldots, a_n) = a_1^2 + \cdots a_n^2,$$

pelo que é imediato que $u \mid u \geq 0$, pois $a_i^2 \geq 0$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Além disso, tem-se $u \mid u = 0$ se e só se $a_1 = \ldots = a_n = 0$, ou seja, se e só se $u = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Exercício 5.2

Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ com o produto escalar. Sejam $u = (4, 1, 2, 3), v = (0, 2, 1, -2)$, $w = (3, 1, 0, 2) \in \mathbb{R}^4$. Calcule:

(a) $u \mid v$. (b) $v \mid u$. (c) $u \mid (3w)$. (d) $(-v) \mid (-w)$.
(e) $u \mid (v + w)$. (f) $\|u\|$. (g) $\|u + v\|$. (h) $\|-2u\| + 3\|v\|$.
(i) $d(u, v)$. (j) $\dfrac{1}{\|w\|} w$. (k) $\left\| \dfrac{1}{\|w\|} w \right\|$.

Resolução:

Sejam $u = (4, 1, 2, 3)$, $v = (0, 2, 1, -2)$ e $w = (3, 1, 0, 2)$. Então:

(a) $u \,|\, v = 4 \times 0 + 1 \times 2 + 2 \times 1 + 3 \times (-2) = -2$.

(b) $v \,|\, u = u \,|\, v = -2$.

(c) $u \,|\, (3w) = 3(u \,|\, w) = 3(4 \times 3 + 1 \times 1 + 2 \times 0 + 3 \times 2) = 57$.

(d) $(-v) \,|\, (-w) = (-1 \times (-1))(v \,|\, w) = (0 \times 3 + 2 \times 1 + 1 \times 0 + (-2) \times 2) = -2$.

(e) $u \,|\, (v + w) \quad = u \,|\, v + u \,|\, w = -2 + 19 = 17$

(f) $\| u \| = \sqrt{u \,|\, u} = \sqrt{30}$.

(g) $\| u + v \| = \| (4, 3, 3, 1) \| = \sqrt{(4, 3, 3, 1) \cdot (4, 3, 3, 1)} = \sqrt{35}$.

(h) $\| -2u \| + 3 \| v \| = |-2| \| u \| + 3 \| v \| = 2\sqrt{30} + 3 \times 3 = 2\sqrt{30} + 9$

(i) $d(u, v) = \| v - u \| = \| (-4, 1, -1, -5) \| = \sqrt{43}$.

(j) $\dfrac{1}{\| w \|} w = \frac{1}{\sqrt{14}}(3, 1, 0, 2)$

(k) $\left\| \dfrac{1}{\| w \|} w \right\| = \left| \frac{1}{\|w\|} \right| \| w \| = \frac{1}{\|w\|} \| w \| = 1$.

Exercício 5.3

Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ com o produto escalar. Para que valores de k podemos afirmar que $\| kv \| = 5$, se $v = (-2, 3, 0, 6)$?

Resolução:
Tem-se

$$\begin{array}{rcl} \| kv \| = 5 & \Leftrightarrow & |k|\sqrt{v \mid v} \\ & \Leftrightarrow & |k|\sqrt{(-2,3,0,6)\cdot(-2,3,0,6)} = 5 \\ & \Leftrightarrow & |k|\sqrt{4+9+0+36} = 5 \\ & \Leftrightarrow & |k|\sqrt{49} = 5 \\ & \Leftrightarrow & |k| = \frac{5}{7} \\ & \Leftrightarrow & k = -\frac{5}{7} \text{ ou } k = \frac{5}{7}. \end{array}$$

Exercício 5.4

Prove que, para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^n$:

(a) $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$.

(b) $u \mid v = \frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2$.

Resolução: A prova das propriedades seguintes segue da definição de norma de um vetor e das propriedades do produto escalar.

(a) Para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^n$, tem-se

$$\begin{array}{rcl} \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 & = & \left(\sqrt{(u+v) \mid (u+v)}\right)^2 + \left(\sqrt{(u-v) \mid (u-v)}\right)^2 \\ & = & (u+v) \mid (u+v) + (u-v) \mid (u-v) \\ & = & (u \mid u + 2u \mid v + v \mid v) + (u \mid u - 2u \mid v + v \mid v) \\ & = & 2(u \mid u) + 2(v \mid v) \\ & = & 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2. \end{array}$$

(b) Para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^n$, tem-se

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2 & = & \frac{1}{4}\left(\sqrt{(u+v) \mid (u+v)}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\sqrt{(u-v) \mid (u-v)}\right)^2 \\ & = & \frac{1}{4}((u+v) \mid (u+v)) - \frac{1}{4}((u-v) \mid (u-v)) \\ & = & \frac{1}{4}(u \mid u + 2u \mid v + v \mid v) - \frac{1}{4}(u \mid u - 2u \mid v + v \mid v) \\ & = & u \mid v. \end{array}$$

Exercício 5.5

Determine a distância entre os pontos P e Q, sabendo que:

(a) $P = (1, -1)$ e $Q = (7, 7)$.

(b) $P = (1, 1, -1)$ e $Q = (2, -1, 5)$.

Resolução: Dados $u, v \in \mathbb{R}^n$, designa-se por *distância entre* u *e* v, e representa-se por $d(u, v)$, o real $\|v - u\|$. Assim, temos:

(a) $d(P,Q) = \| Q - P \| = \| (6,8) \| = \sqrt{(6,8)\cdot(6,8)} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10.$

(b) $d(P,Q) = \| Q - P \| = \| (1,-2,6) \| = \sqrt{(1,-2,6)\cdot(1,-2,6)} = \sqrt{1+4+36} = \sqrt{41}.$

Exercício 5.6

Determine o ângulo formado pelos vetores:

(a) $u = (1, 1, 0)$ e $v = (1, 2, 1)$, em $\mathbb{R}^3$;

(b) $u = (1, 0, 0, 0, 0)$ e $v = (1, 1, 1, 1, 1)$, em $\mathbb{R}^5$.

Resolução: Dados $u, v \in \mathbb{R}^n$, chama-se *ângulo dos vectores* u e v, e representa-se por $\angle(u, v)$, o número real $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos\theta = \frac{u \mid v}{\|u\|\|v\|}.$$

(a) O ângulo formado por u e v é o real $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos\theta = \frac{u \mid v}{\| u \|\| v \|} = \frac{1+2+0}{\sqrt{1+1}\sqrt{1+4+1}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Logo, $\angle(u, v) = \frac{\pi}{6}$.

(b) O ângulo formado por u e v é o real $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos\theta = \frac{u \mid v}{\| u \|\| v \|} = \frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Logo, $\angle(u, v) = 63,43^o$.

Exercício 5.7

Para cada um dos subespaços V de $\mathbb{R}^n$ a seguir indicados, determine uma base ortonormada de V.

(a) Em $\mathbb{R}^3$, $V =< (-1, 3, 2) >$.

(b) Em $\mathbb{R}^3$, $V =< (0, 1, -1), (2, 1, 0) >$.

(c) Em $\mathbb{R}^3$, $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2x + 5y - z = 0\}$.

(d) Em $\mathbb{R}^4$, $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \, : \, x - z = 0, 2x - y + w = 0\}$.

Resolução:

(a) Sejam $v_1 = (-1, 3, 2)$. A sequência (v_1) é linearmente independente, pois $v_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. Logo, esta sequência é uma base de V. A base (v_1) é uma base ortognal. Normalizando o vetor da sequência anterior, obtem-se a sequência

$$\left(\frac{1}{\|u_1\|}u_1\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}(-1, 3, 2)\right) = \left(\left(-\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}\right)\right)$$

a qual é uma base ortonormada de V.

(b) Sejam $v_1 = (0, 1, -1)$ e $v_2 = (2, 1, 0)$. A sequência (v_1, v_2) é linearmente independente (fica ao cuidado do leitor fazer essa verificação). Logo, (v_1, v_2) é uma base de V.

No sentido de se obter uma base ortonormada de V, comecemos por obter uma base ortogonal (aplicando o Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt) e depois normalizamos.

Pelo Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt, obtemos a base ortogonal (u_1, u_2) de V, onde

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 = (0, 1, -1), \\ u_2 &= v_2 - \frac{v_2 \mid u_1}{u_1 \mid u_1}u_1 = (2, 1, 0) - \frac{(2, 1, 0) \mid (0, 1, -1)}{(0, 1, -1) \mid (0, 1, -1)}(0, 1, -1) \\ &= (2, 1, 0) - \frac{1}{2}(0, 1, -1) = \left(2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Normalizando cada um dos vetores anteriores da base anterior, obtem-se a sequência

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{1}{\|u_1\|}u_1, \tfrac{1}{\|u_2\|}u_2\right) &= \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1), \tfrac{1}{\frac{3}{\sqrt{2}}}\left(2,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)\\ &= \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1), \tfrac{\sqrt{2}}{3}\left(2,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)\\ &= \left(\left(0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{1}{3\sqrt{2}},\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)\right)\end{aligned}$$

a qual é uma base ortonormada de V.

(c) No sentido de obtermos uma base ortormada de V, comecemos por determinar uma base de V.

Tem-se

$$\begin{aligned}V &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : -2x+5y-z=0\}\\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=-2x+5y=0\}\\ &= \{(x,y,-2x+5y)\in\mathbb{R}^3 : x,y\in\mathbb{R}\}\\ &= \{x(1,0,-2)+y(0,1,5)\in\mathbb{R}^3 : x,y\in\mathbb{R}\}\\ &= <(1,0,-2),(0,1,5)>.\end{aligned}$$

A sequência $((1,0,-2),(0,1,5))$ é linearmente independente (fica ao cuidado do leitor fazer a verificação). Logo, $(1,0,-2),(0,1,5))$ é uma base de V.

Sejam $v_1=(1,0,-2)$ e $v_2=(0,1,5)$. Partindo da base (v_1,v_2) e aplicando o Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt, obtem-se a base ortogonal (u_1,u_2), onde

$$\begin{aligned}u_1 &= v_1=(1,0,-2),\\ u_2 &= v_2-\frac{v_2\mid u_1}{u_1\mid u_1}u_1=(0,1,5)-\frac{(0,1,5)\mid(1,0,-2)}{(1,0,-2)\mid(1,0,-2)}(1,0,-2)\\ &= (0,1,5)-\frac{-10}{5}(1,0,-2)=(2,1,1).\end{aligned}$$

Normalizando cada um dos vetores da base anterior, obtem-se sequência

$$\left(\frac{1}{\|u_1\|}u_1,\frac{1}{\|u_2\|}u_2\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,-2),\frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,1)\right)=\left(\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,-\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\left(\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right)$$

a qual é uma base ortonormada de V.

(d) No sentido de obtermos uma base ortonormada de V, comecemos por determinar uma base de V.

Tem-se

$$\begin{aligned}V &= \{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 \,:\, x-z=0, 2x-y+w=0\}\\ &= \{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 \,:\, z=x, y=2x+w\}\\ &= \{(x,2x+w,x,w)\in\mathbb{R}^4 \,:\, x,w\in\mathbb{R}\}\\ &= \{x(1,2,1,0)+w(0,1,0,1))\in\mathbb{R}^4 \,:\, x,w\in\mathbb{R}\}\\ &= <(1,2,1,0),(0,1,0,1)>.\end{aligned}$$

Sejam $v_1=(1,2,1,0)$ e $v_2=(0,1,0,1)$. A sequência (v_1,v_2) é linearmente independente (fica ao cuidado do leitor fazer a verificação), logo é uma base de W.

Partindo da base (v_1, v_2) e aplicando o Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt, obtem-se a base ortogonal (u_1, u_2), onde

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 = (1,2,1,0), \\ u_2 &= v_2 - \frac{v_2 \mid u_1}{u_1 \mid u_1} u_1 = (0,1,0,1) - \frac{(0,1,0,1) \mid (1,2,1,0)}{(1,2,1,0) \mid (1,2,1,0)}(1,2,1,0) \\ &= (0,1,0,1) - \frac{2}{6}(1,2,1,0) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right). \end{aligned}$$

Normalizando cada um dos vetores anteriores da base anterior, obtem-se sequência

$$\left(\frac{1}{\|u_1\|} u_1, \frac{1}{\|u_2\|} u_2\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1,0),\ \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)\right)$$

a qual é uma base ortonormada de V.

Exercício 5.8

Sejam V_1 e V_2 subespaços de $\mathbb{R}^n$. Mostre que:

(a) Se $V_1 \subseteq V_2$, então $V_2^\perp \subseteq V_1^\perp$.

(b) Se $V_1^\perp = V_2^\perp$, então $V_1 = V_2$.

(c) $V_1^\perp + V_2^\perp \subseteq (V_1 \cap V_2)^\perp$.

Resolução:

(a) Sejam V_1 e V_2 subespaços de $\mathbb{R}^n$ tais que $V_1 \subseteq V_2$. Seja $u \in V_2^\perp$. então $u \perp v$, para todo $v \in V_2$. Como $V_1 \subseteq V_2$, então também se tem $u \perp w$, para todo $w \in V_1$. Logo $u \in V_1^\perp$. Portanto, $V_2^\perp \subseteq V_1^\perp$.

(b) Sejam V_1 e V_2 subespaços de $\mathbb{R}^n$ tais que $V_1^\perp = V_2^\perp$. Então $(V_1^\perp)^\perp = (V_2^\perp)^\perp$, donde resulta $V_1 = V_2$, uma vez que $(V_1^\perp)^\perp = V_1$ e $(V_2^\perp)^\perp = V_2$.

Exercício 5.9

Para cada um dos subespaços V de $\mathbb{R}^n$ a seguir indicados, determine o complemento ortogonal de V.

(a) Em $\mathbb{R}^3$, $V = < (-1,3,2) >$.

(b) Em $\mathbb{R}^3$, $V = < (0,1,-1), (2,1,0) >$.

(c) Em $\mathbb{R}^3$, $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -2x + 5y - z = 0\}$.

(d) Em $\mathbb{R}^4$, $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x - z = 0, 2x - y + w = 0\}$.

Resolução:

(a) Seja $v_1 = (-1,3,2)$. A sequência (v_1) é uma base de V. Então

$$\begin{aligned} V^\perp &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x,y,z) \mid v_1 = 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, -x + 3y + z = 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = 3y + z\} \\ &= \left\{(3y+z, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y, z \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{y(3,1,0) + z(1,0,1) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y, z \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \langle (3,1,0), (1,0,1) \rangle. \end{aligned}$$

(b) No sentido de determinar o complemento ortogonal de V, comecemos por determinar uma base de V. Da resolução da alinea (a) do exercício 5.7 sabe-se que $((0,1,-1),(2,1,0))$ é uma base de V. Sejam $v_1 = (0,1,-1)$ e $v_2 = (2,1,0)$. Então

$$\begin{aligned}
V^{\perp} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z) \mid v_1 = 0, (x,y,z) \mid v_2 = 0\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - z = 0, 2x + y = 0\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = y, x = -\tfrac{1}{2}y\} \\
&= \left\{\left(-\frac{1}{2}y, y, y\right) \in \mathbb{R}^3 \mid z, w \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{y\left(-\frac{1}{2}, 1, 1\right) \in \mathbb{R}^3 \mid z, w \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\langle\left(-\frac{1}{2}, 1, 1\right)\right\rangle .
\end{aligned}$$

(c) No sentido de determinar o complemento ortogonal de V, comecemos por determinar uma base de V. Da resolução da alinea (c) do exercício 5.7 sabe-se que $((1,0,-2),(0,1,5))$ é uma base de V. Sejam $v_1 = (1,0,-2)$ e $v_2 = (0,1,5)$. Então

$$\begin{aligned}
V^{\perp} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z) \mid v_1 = 0, (x,y,z) \mid v_2 = 0\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2z = 0, y + 5z = 0\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2z, y = -5z\} \\
&= \{(2z, -5z, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \\
&= \{z(2,-5,1) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \\
&= <(2,-5,1)> .
\end{aligned}$$

(d) No sentido de determinar o complemento ortogonal de V, comecemos por determinar uma base de V. Da resolução da alinea (d) do exercício 5.7 sabe-se que $((1,2,1,0),(0,1,0,1))$ é uma base de V. Sejam $v_1 = (1,2,1,0)$ e $v_2 = (0,1,0,1)$. Então

$$\begin{aligned}
V^{\perp} &= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid (x,y,z,w) \mid v_1 = 0, (x,y,z,w) \mid v_2 = 0\} \\
&= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + z = 0, y + w = 0\} \\
&= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x = -2y - z, w = -y\} \\
&= \{(-2y - z, y, z, -y) \in \mathbb{R}^4 \mid z, w \in \mathbb{R}\} \\
&= \{y(-2,1,0,-1) + z(-1,0,1,0) \in \mathbb{R}^4 \mid z, w \in \mathbb{R}\} \\
&= <(-2,1,0,-1),(-1,0,1,0))> .
\end{aligned}$$

Exercício 5.10

Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do produto escalar. Seja (v_1, v_2, v_3) uma base ortonormada de um subespaço vetorial V de $\mathbb{R}^4$.

(a) Determine:

i. $v_1 \mid (v_2 + v_3)$.

ii. $\|2v_1 + v_2 - v_3\|$.

iii. $\angle(v_2 - v_3, v_1 - v_2)$.

(b) Determine o complemento ortogonal de:

i. $W_1 =< v_1 + v_3, v_1 - 2v_2 + v_3 >$.

ii. $W_2 = \{a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 \in \mathbb{R}^4 \mid a_1 + a_2 - a_3 = 0, a_1 - a_3 = 0\}$.

Resolução: (a) Atendendo a que (v_1, v_2, v_3) é uma base ortonormada, tem-se $v_i \mid v_j = 0$, para quaisquer $i, j \in \{1, 2, 3\}$ tais que $i \neq j$ e $\|v_i\| = 1$. Então, considerando as propriedades do produto escalar, temos:

i. $v_1 \mid (v_2 + v_3) = v_1 \mid v_2 + v_1 \mid v_3 = 0 + 0 = 0.$

ii. $\|2v_1 + v_2 - v_3\| = \sqrt{(2v_1 + v_2 - v_3) \mid (2v_1 + v_2 - v_3)} = \sqrt{4(v_1 \mid v_1) + v_2 \mid v_2 + v_3 \mid v_3}$
$= \sqrt{4 \times 1 + 1 + 1} = \sqrt{7}.$

iii. O ângulo formado por $v_2 - v_3$ e $v_1 - v_2$ é o real $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos\theta = \frac{(v_2 - v_3) \mid (v_1 - v_2)}{\| (v_2 - v_3) \| \| (v_1 - v_2) \|} = \frac{v_2 \mid v_2}{\sqrt{v_2 \mid v_2 + v_3 \mid v_3}\sqrt{v_1 \mid v_1 + v_2 \mid v_2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Logo, $\angle(v_2 - v_3, v_1 - v_2) = \dfrac{\pi}{3}$.

(b) Seja (v_1, v_2, v_3) uma base ortonormada de um subespaço vetorial V de $\mathbb{R}^4$. então existe uma base de $\diagdown^4$ que inclui $(v_1$, v_2 e v_3. Seja (v_1, v_2, v_3, u_4) essa base. Pelo Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, existe $v_4 \in \mathbb{R}^4$ tal que (v_1, v_2, v_3, v_4) é uma base orotnormada de $\mathbb{R}^4$. Então:

i. Seja $W_1 =< v_1 + v_3, v_1 - 2v_2 + v_3 >$. A sequência $(v_1 + v_3, v_1 - 2v_2 + v_3)$ é linearmente independente. Logo, $(v_1 + v_3, v_1 - 2v_2 + v_3)$ é uma base de W_1. Assim,

$$\begin{array}{rcl}
W_1^{\perp} & = & \{u \in \mathbb{R}^4 \,:\, u \mid (v_1 + v_3) = 0, u \mid (v_1 - 2v_2 + v_3) = 0\} \\
& = & \{u = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 \in \mathbb{R}^4 \,:\, u \mid (v_1 + v_3) = 0, u \mid (v_1 - 2v_2 + v_3) = 0\} \\
& = & \{u = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 \in \mathbb{R}^4 \,:\, a_1 + a_3 = 0, a_1 - 2a_2 + a_3 = 0\} \\
& = & \{u = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 \in \mathbb{R}^4 \,:\, a_1 = -a_3, a_2 = 0\} \\
& = & \{u = -a_3v_1 + a_3v_3 + a_4v_4 \in \mathbb{R}^4 \,:\, a_3, a_4 \in \mathbb{R}\} \\
& = & \{u = a_3(-v_1 + v_3) + a_4v_4 \in \mathbb{R}^4 \,:\, a_3, a_4 \in \mathbb{R}\} \\
& = & < -v_1 + v_3, v_4 > .
\end{array}$$

ii. Seja $W_2 = \{a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 \in \mathbb{R}^4 \,|\, a_1 + a_2 - a_3 = 0, a_1 - a_3 = 0\}$. Então

$$\begin{array}{rcl}
W_2 & = & \{a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 \in \mathbb{R}^4 \,:\, a_1 + a_2 - a_3 = 0, a_1 - a_3 = 0\} \\
& = & \{a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 \in \mathbb{R}^4 \,:\, a_2 = 0, a_1 = a_3\} \\
& = & \{a_1v_1 + a_1v_3 \in \mathbb{R}^4 \,:\, a_1 \in \mathbb{R}\} \\
& = & \{a_1(v_1 + v_3) \in \mathbb{R}^4 \,:\, a_1 \in \mathbb{R}\} \\
& = & < v_1 + v_3 > .
\end{array}$$

A sequência $((v_1 + v_3))$ é linearmente independente. Assim, $((v_1 + v_3))$ é uma base de W_2. Logo,

$$\begin{array}{rcl}
W_2^{\perp} & = & \{u \in \mathbb{R}^4 \,:\, u \mid (v_1 + v_3) = 0\} \\
& = & \{u = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 \in \mathbb{R}^4 \,:\, u \mid (v_1 + v_3) = 0\} \\
& = & \{u = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 \in \mathbb{R}^4 \,:\, a_1 + a_3 = 0\} \\
& = & \{u = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 \in \mathbb{R}^4 \,:\, a_1 = -a_3\} \\
& = & \{u = -a_3v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 \in \mathbb{R}^4 \,:\, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}\} \\
& = & \{u = a_3(-v_1 + v_3) + a_2v_2 + a_4v_4 \in \mathbb{R}^4 \,:\, a_2a_3, a_4 \in \mathbb{R}\} \\
& = & < -v_1 + v_3, v_2, v_4 > .
\end{array}$$

(c) Seja $v \in V_1^{\perp} + V_2^{\perp}$. Então $v = u + w$, com $u \in V_1^{\perp}$ e $w \in V_2^{\perp}$. Seja $x \in V_1 \cap V_2$. Então, $x \in V_1$ e $x \in V_2$, pelo que $x \mid v = (x \mid u) + (x \mid w) = 0 + 0 = 0$. Assim, v é ortogonal a todo o elemento de $V_1 \cap V_2$, pelo que $v \in (V_1 \cap V_2)^{\perp}$.

Exercício 5.11

Sejam V o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $< (1,0,0),(0,1,0) >$ e $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Mostre que $\text{proj}_V u = (a,b,0)$.

Resolução: Sejam V o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $< (1,0,0),(0,1,0) >$ e $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Designemos por v_1 e v_2 os vetores $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$, respetivamente. A sequência (v_1, v_2) é uma base ortonormada de V. Por conseguinte, temos

$$\begin{aligned} \text{proj}_V u &= (u \mid v_1)v_1 + (u \mid v_2)v_2 \\ &= av_1 + bv_2 \\ &= (a,b,0). \end{aligned}$$

Exercício 5.12

Seja V um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Mostre que

(a) Se $u \in V$, então $\text{proj}_V u = u$.

(b) Se $u \in V^T$, então $\text{proj}_V u = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Resolução:
(a) Sejam $u \in V$ e $(v_1, \ldots, v_n)$ uma base ortonormada de V. Então

$$u = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n, \text{ para alguns } a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$$

e tem-se

$$\text{proj}_V u = (u \mid v_1)v_1 + \cdots + (u \mid v_n)v_n.$$

Como os vetores $v_1, \ldots, v_n$ são ortogonais dois a dois segue que

$$u \mid v_i \quad = \quad (a_1v_1 + \cdots + a_iv_i + \cdots + a_nv_n) \mid v_i = a_i,$$

para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Portanto, $\text{proj}_V u = u$.
(b) Sejam $u \in V^\perp$ e $(v_1, \ldots, v_n)$ uma base ortonormada de V. Então

$$\text{proj}_V u = (u \mid v_1)v_1 + \cdots + (u \mid v_n)v_n.$$

Como $u \mid v_i = 0$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, segue que $\text{proj}_V u = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Exercício 5.13

Para cada um dos seguintes subespaços V de $\mathbb{R}^n$ e para o vetor $u \in \mathbb{R}^n$ indicado, determine $\text{proj}_V u$ e decomponha u na forma $u_1 + u_2$, onde $u_1 \in V$ e $u_2 \in V^T$.

(a) Em $\mathbb{R}^3$, $V =< (-1,3,2) >$, $u = (2,2,-3)$.

(b) Em $\mathbb{R}^3$, $V =< (0,1,-1),(2,1,0) >$, $u = (1,0,2)$.

(c) Em $\mathbb{R}^3$, $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -2x + 5y - z = 0\}$, $u = (2,-1,1)$.

(d) Em $\mathbb{R}^4$, $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x - z = 0, 2x - y + w = 0\}$, $u = (-1,1,2,0)$.

Resolução:
(a) Sejam $V =< (-1,3,2) >$ e $u = (2,2,-3)$. No sentido de determinar $\text{proj}_V u$ será útil começar por determinar uma base ortonormada de V. Da alínea (a) do exercício 5.7 sabe-se que

$$\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}\right)\right)$$

é uma base ortonormada de V. Seja $v_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{14}},\ \frac{3}{\sqrt{14}},\ \frac{2}{\sqrt{14}}\right)$. Então

$$\mathrm{proj}_V u = (u \mid v_1)v_1 = -\frac{2}{\sqrt{14}}v_1 = \left(\frac{1}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{2}{7}\right).$$

Uma vez que $u = \mathrm{proj}_V u + u_2$, $\mathrm{proj}_V u \in V$ e $u_2 = u - \mathrm{proj}_V u \in V^T$, tem-se

$$u = u_1 + u_2$$

com $u_1 = \left(\frac{1}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{2}{7}\right) \in V$ e $u_2 = \left(\frac{13}{7}, \frac{17}{7}, -\frac{19}{7}\right) \in V^T$.

(b) Sejam $V =< (0,1,-1),(2,1,0) >$ e $u = (1,0,2)$. No sentido de determinar $\mathrm{proj}_V u$ será útil começar por determinar uma base ortonormada de V. Da alínea (b) do exercício 5.7 sabe-se que

$$\left(\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)\right)$$

é uma base ortonormada de V. Sejam $v_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $v_2 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$. Então

$$\begin{aligned}
\mathrm{proj}_V u &= (u \mid v_1)v_1 + (u \mid v_2)v_2 \\
&= -\sqrt{2}v_1 + \sqrt{2}v_2 \\
&= (0,-1,1) + \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \\
&= \left(\frac{4}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{4}{3}\right).
\end{aligned}$$

Uma vez que $u = \mathrm{proj}_V u + u_2$, $\mathrm{proj}_V u \in V$ e $u_2 = u - \mathrm{proj}_V u \in V^T$, tem-se

$$u = u_1 + u_2$$

com $u_1 = \left(\frac{4}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{4}{3}\right) \in V$ e $u_2 = \left(-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right) \in V^T$.

(c) Sejam $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -2x + 5y - z = 0\}$, $u = (2,-1,1)$. No sentido de determinar $\mathrm{proj}_V u$ será útil começar por determinar uma base ortonormada de V. Da alínea (c) do exercício 5.7 sabe-se que

$$\left(\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right)$$

é uma base ortonormada de V. Sejam $v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ e $v_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. Então

$$\begin{aligned}
\mathrm{proj}_V u &= (u \mid v_1)v_1 + (u \mid v_2)v_2 \\
&= 0v_1 + \frac{2\sqrt{6}}{3}v_2 \\
&= \left(\frac{4}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right).
\end{aligned}$$

Uma vez que $u = \mathrm{proj}_V u + u_2$, $\mathrm{proj}_V u \in V$ e $u_2 = u - \mathrm{proj}_V u \in V^T$, tem-se

$$u = u_1 + u_2$$

com $u_1 = \left(\frac{4}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right) \in V$ e $u_2 = \left(\frac{2}{3},\ -\frac{5}{3},\ \frac{1}{3}\right)$.

(d) Sejam $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x - z = 0, 2x - y + w = 0\}$ e $u = (-1, 1, 2, 0)$. Por processo análogo ao usado nas alíneas anteriores, obtem-se $\text{proj}_V\, u = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0\right)$ e $u = u_1 + u_2$ com

$$u_1 = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0\right) \in V \text{ e } u_2 = u - u_1 = \left(-\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}, 0\right) \in V^T.$$

Exercício 5.14

Em cada uma das alíneas seguintes, determine a distância mínima do ponto P ao subespaço V de $\mathbb{R}^n$ indicado.

(a) $P = (-2, 3, 1)$, $V =< (-1, 4, 4), (2, -1, 0) >$ em $\mathbb{R}^3$.

(b) $P = (4, -1, 2)$, $V =< (-2, 3, -3) >$ em $\mathbb{R}^3$.

(c) $P = (2, 3, -3, 1)$, $V =< (-1, 2, -1, 1), (2, -1, 1, -1) >$ em $\mathbb{R}^4$.

(d) $P(-1, 4, -2, 2)$, $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 2x - 3z + w = 0\}$.

Resolução:

(a) Sejam $P = (-2, 3, 1)$ e $V =< (-1, 4, 4), (2, -1, 0) >$. A distância mínima do ponto P ao subespaço V corresponde à distância entre P e $\text{proj}_V P$. Assim, comecemos por determinar $\text{proj}_V P$.

Para calcular $\text{proj}_V P$, vamos recorrer a uma base ortonormada de V.

Considerando que a sequência $((-1, 4, 4), (2, -1, 0))$ é linearmente independente, esta sequência é uma base de V. Partindo desta base e pelo Processo de Ortogonalização de Gram-Scmidt, obtemos a base ortogonal

$$((-1, 4, 4), (20, -3, 8)).$$

Normalizando cada um dos vetores desta base, obtem-se a sequência

$$\left(\frac{1}{\sqrt{33}}(-1, 4, 4), \frac{1}{\sqrt{473}}(20, -3, 8)\right)$$

a qual é uma base ortonormada de V. Sejam $v_1 = \frac{1}{\sqrt{33}}(-1, 4, 4)$ e $v_2 = \frac{1}{\sqrt{473}}(20, -3, 8)$. Então

$$\text{proj}_V P = (u \mid v_1)v_1 + (u \mid v_2)v_2 = \frac{18}{\sqrt{33}}v_1 + \frac{-41}{\sqrt{473}}v_2 = \left(\frac{-98}{43}, \frac{105}{43}, \frac{64}{43}\right).$$

Assim, a distância mínima do ponto P ao subespaço V é

$$\|P - \text{proj}_V P\| = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{43}}.$$

(b) Sejam $P = (4, -1, 2)$, $V =< (-2, 3, -3) >$. A distância mínima do ponto P ao subespaço V corresponde à distância entre P e proj_V. Assim, comecemos por determinar $\text{proj}_V P$.

Para calcular $\text{proj}_V P$, vamos recorrer a uma base ortonormada de V.

Considerando que a sequência $((-2, 3, 3))$ é linearmente independente, esta sequência é uma base de V. Esta base é ortognal e normalizando co vetor desta base, obtem-se a sequência

$$\left(\frac{1}{\sqrt{22}}(-2, 3, 3)\right)$$

a qual é uma base ortonormada de V. Sendo $v_1 = \frac{1}{\sqrt{22}}(-2,3,3)$, tem-se

$$\text{proj}_V P = (u \mid v_1)v_1 = \frac{-17}{\sqrt{22}} v_1 = \left(\frac{17}{11}, -\frac{51}{22}, \frac{51}{22}\right).$$

Assim, a distância mínima do ponto P ao subespaço V é

$$\|P - \text{proj}_V P\| = \frac{\sqrt{173}}{\sqrt{22}}.$$

(c) Sejam $P = (2,3,-3,1)$ e $V =< (-1,2,-1,1),(2,-1,1,-1) >$. A distância mínima do ponto P ao subespaço V corresponde à distância entre P e $\text{proj}_V P$. Assim, comecemos por determinar $\text{proj}_V P$.

Para calcular $\text{proj}_V P$, vamos recorrer a uma base ortonormada de V.

Considerando que a sequência $((-1,2,-1,1),(2,-1,1,-1))$ é linearmente independente, esta sequência é uma base de V. Partindo desta base e pelo Processo de Ortogonalização de Gram-Scmidt, obtemos a base ortogonal

$$\left((-1,2,-1,1), \left(\frac{8}{7}, \frac{5}{7}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{7}\right)\right).$$

Normalizando cada um dos vetores desta base, obtem-se a sequência

$$\left(\frac{1}{\sqrt{7}}(-1,2,-1,1), \frac{7}{\sqrt{91}}\left(\frac{8}{7}, \frac{5}{7}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{7}\right)\right)$$

a qual é uma base ortonormada de V. Sejam $v_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(-1,2,-1,1)$ e $v_2 = \frac{7}{\sqrt{91}}(\frac{8}{7}, \frac{5}{7}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{7})$. Então

$$\text{proj}_V P = (u \mid v_1)v_1 + (u \mid v_2)v_2 = \frac{8}{7}v_1 + \frac{21}{11}v_2 = \left(\frac{80}{77}, \frac{281}{77}, -\frac{67}{77}, \frac{67}{77}\right).$$

Assim, a distância mínima do ponto P ao subespaço V é

$$\|P - \text{proj}_V P\| = \frac{\sqrt{54772}}{77}.$$

(d) Sejam $P = (-1,4,-2,2)$ e $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : 2x - 3z + w = 0\}$. A distância mínima do ponto P ao subespaço V corresponde à distância entre P e $\text{proj}_V P$. Assim, comecemos por determinar $\text{proj}_V P$.

Para calcular $\text{proj}_V P$, vamos recorrer a uma base ortonormada de V.

Tem-se

$$\begin{aligned} V &= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : 2x - 3z + w = 0\} \\ &= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : w = -2x + 3z\} \\ &= \{(x,y,z,-2x+3z) \in \mathbb{R}^4 : x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,0,0,-2) + y(0,1,0,0) + z(0,0,1,3) \in \mathbb{R}^4 : x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= < (1,0,0,-2),(0,1,0,0),(0,0,1,3) > . \end{aligned}$$

Considerando que a sequência $((1,0,0,-2),(0,1,0,0),(0,0,1,3))$ é linearmente independente, esta sequência é uma base de V. Partindo desta base e pelo Processo de Ortogonalização de Gram-Scmidt, obtemos a base ortogonal

$$\left(((1,0,0,-2),(0,1,0,0), \left(\frac{6}{5}, 0, 1, \frac{3}{5}\right)\right).$$

Normalizando cada um dos vetores desta base, obtem-se a sequência

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,0,-2),(0,0,1,0), \frac{1}{\sqrt{70}}\left(\frac{6}{5}, 0, 1, \frac{3}{5}\right)\right)$$

a qual é uma base ortonormada de V. Sejam $v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,0,-2)$ $v_2 = (0,0,1,0)$ e $v_3 = \frac{1}{\sqrt{70}}\left(\frac{6}{5},0,1,\frac{3}{5}\right)$. Então

$$\mathrm{proj}_V P = (u \mid v_1)v_1 + (u \mid v_2)v_2 + (u \mid v_3)v_3 = -\sqrt{5}v_1 + 4v_2 - \frac{10}{\sqrt{70}}v_3 = \left(-\frac{13}{7}, 4, -\frac{5}{7}, \frac{11}{7}\right).$$

Assim, a distância mínima do ponto P ao subespaço V é

$$\|P - \mathrm{proj}_V P\| = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{7}}.$$

6 Determinantes

Exercícios e resoluções

Exercício 6.1

Calcule, pela definição, os seguintes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$. (b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$. (c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

(d) $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$. (e) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Resolução:

Por definição de determinante de uma matriz (quadrada), tem-se:

(a) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \times 4 \times \det[5] + (-1)^{1+2} \times 3 \times \det[7] = 20 - 21 = -1.$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \times 1 \times \det[-4] + (-1)^{1+2} \times (-2) \times \det[3] = -4 + 6 = 2.$

(c)
$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1} \times 2 \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \times 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 2 \times (0 \times 2 - 1 \times 0) - 1 \times (1 \times 2 - 4 \times 0) + 3 \times (1 \times 1 - 4 \times 0) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1} \times (-2) \times \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\
&\quad + (-1)^{1+3} \times 0 \times \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\
&= (-2) \times (-3 \times 2 - (-2) \times 1) - 2 \times (3 \times 2 - 3 \times 1) \\
&= 2.
\end{aligned}$$

(e) $$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \times 3 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$+(-1)^{1+3} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 3 \times (1 \times 1 - 2 \times (-1)) + 1 \times (1 \times 1 - (-1) \times (-1)) + 1 \times (1 \times 2 - (-1) \times 1)$$
$$= 12.$$

Exercício 6.2

Use o teorema de Laplace para calcular o determinante das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. (b) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -5 \end{bmatrix}$.

Resolução:

(a) Aplicando o Teorema de Laplace ao longo da coluna 1, temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (1 \times 1 - 1 \times 2) = -1.$$

(b) Aplicando o Teorema de Laplace ao longo da linha 3, temos:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \times 3 \times \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \times ((-1) \times 1 - 2 \times 3) = 21.$$

(c) Aplicando o Teorema de Laplace, temos:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{(i)}}{=} (-1)^{4+4} \times 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{(ii)}}{=} 1 \times (-1)^{2+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -1 \times (0 \times 1 - 1 \times 1) = 1.$$

(i) Teorema de Laplace ao longo da linha 4.
(ii) Teorema de Laplace ao longo da coluna 1.

(d) Aplicando o Teorema de Laplace, temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -5 \end{vmatrix} \overset{\text{(i)}}{=} (-1)^{2+2} \times 2 \times \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$
$$\overset{\text{(ii)}}{=} 2 \times \left((-1)^{2+1} \times 3 \times \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \times (-2) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \right)$$
$$= 2 \times (-3 \times ((-3) \times (-5) - 2 \times 4) + (-2) \times (1 \times (-5) - 1 \times 4))$$
$$= -6.$$

(i) Teorema de Laplace ao longo da coluna 2.
(ii) Teorema de Laplace ao longo da linha 2.

Exercício 6.3

Calcule, reduzindo o problema ao cálculo do determinante de uma matriz triangular, o determinante de cada uma das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & -4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. (b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 12 \\ 4 & 12 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. (c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Resolução:

(a) $$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & -4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \overset{\substack{l_2 \to l_2 + 2l_1 \\ l_3 \to l_3 + l_1 \\ l_4 \to l_4 + \frac{1}{2}l_1}}{=} \begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{l_3 \to l_3 + l_2}{=} \begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{l_4 \to l_4 - \frac{1}{3}l_3}{=} \begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2) \times 1 \times 6 \times (-2) = 24.$$

(b) $$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 12 \\ 4 & 12 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{l_1 \to \frac{1}{2}l_1}{=} 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 12 \\ 4 & 12 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\substack{l_2 \to l_2 + l_1 \\ l_3 \to l_3 - 6l_1 \\ l_4 \to l_4 - 4l_1}}{=} 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -2 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -1 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\overset{l_3 \leftrightarrow l_4}{=} -2\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -2 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 12 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{l_3 \to l_3 + 6l_2}{=} -2\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -2 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \times (1 \times (-2) \times 8 \times 0) = 0.$$

(c) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{l_2 \to l_2 - \frac{1}{2}l_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{l_2 \leftrightarrow l_3}{=} -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{l_3 \to l_3 - \frac{3}{2}l_2}{=} -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{l_4 \to l_4 + \frac{1}{2}l_3}{=} -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{l_5 \to l_5 - \frac{4}{5}l_4}{=} -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5} \end{vmatrix} = -(2 \times 1 \times (-2) \times \frac{5}{4} \times \frac{6}{5}) = 6.$$

Exercício 6.4

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule o determinante das matrizes indicadas.

(b) Cacule o determinante das seguintes matrizes:

i. $3A$. ii. AB. iii. $-A^2$. iv. $-2C^T$. v. $(CD)^T$.

Resolução: (a)

$|A| = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2.$

$|B| = (-5) \times 2 - 3 \times (-1) = -7.$

$|C| = 3 \times 2 \times 1 = 6.$

$|D| = 0$, pois a matriz D tem duas colunas iguais.

(b)

$|3A| = 3^2|A| = -18.$
$|AB| = |A||B| = (-2) \times (-7) = 14.$
$|-A^2| = (-1)^2|A| = -2.$
$|-2C^T| = (-2)^3|C^T| = -8|C| = -48.$
$|(CD)^T| = |CD| = |C||D| = 6 \times 0 = 0.$

Exercício 6.5

Sabendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c & x \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ d & e & f & y \\ g & h & i & z \end{vmatrix} = 6,$$

determine:

(a) $\begin{vmatrix} 3b & 3c & 3a \\ e & f & d \\ h & i & g \end{vmatrix}$. (b) $\begin{vmatrix} b & h & e \\ c & i & f \\ a & g & d \end{vmatrix}$. (c) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ g-3d & h-3e & i-3f \\ d & e & f \end{vmatrix}$.

Resolução:

Tem-se

$$\begin{vmatrix} a & b & c & x \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ d & e & f & y \\ g & h & i & z \end{vmatrix} = 6 \quad \Leftrightarrow \quad (-1)^{2+4} \times 2 \times \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 6 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3.$$

(a) Atendendo a que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \overset{l_1 \to 3l_1}{=} \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \overset{c_1 \leftrightarrow c_3}{=} -\frac{1}{3} \begin{vmatrix} 3c & 3b & 3a \\ f & e & d \\ i & h & g \end{vmatrix} \overset{c_2 \leftrightarrow c_1}{=} \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 3b & 3c & 3a \\ e & f & d \\ h & i & g \end{vmatrix},$$

segue que

$$\begin{vmatrix} 3b & 3c & 3a \\ e & f & d \\ h & i & g \end{vmatrix} = 9.$$

(b) Tem-se

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \overset{|B|=|B^T|}{=} \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} \overset{l_1 \leftrightarrow l_3}{=} - \begin{vmatrix} c & f & i \\ b & e & h \\ a & d & g \end{vmatrix} \overset{l_1 \leftrightarrow l_2}{=} \begin{vmatrix} b & e & h \\ c & f & i \\ a & d & g \end{vmatrix} \overset{c_2 \leftrightarrow c_3}{=} - \begin{vmatrix} b & h & e \\ c & i & f \\ a & g & d \end{vmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{vmatrix} b & h & e \\ c & i & f \\ a & g & d \end{vmatrix} = -3.$$

(c) Tem-se

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \overset{l_1 \to 2l_1}{=} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \overset{l_2 \leftrightarrow l_3}{=} -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} \overset{l_2 \to l_2 - 3l_3}{=} -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ g-3d & h-3e & i-3f \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

Logo,

$$\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ g-3d & h-3e & i-3f \\ d & e & f \end{vmatrix} = -6.$$

Exercício 6.6
Sejam $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$. Prove que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & y_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & y_1 & y_2 & x_3 \\ 1 & y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = (y_1 - x_1)(y_2 - x_2)(y_3 - x_3).$$

Resolução:

Considerando as propriedades dos determinantes, temos

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & y_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & y_1 & y_2 & x_3 \\ 1 & y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \overset{\substack{l_2 \to l_2 - l_1 \\ l_3 \to l_3 - l_1 \\ l_4 \to l_4 - l_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & y_1 - x_1 & 0 & 0 \\ 0 & y_1 - x_1 & y_2 - x_2 & 0 \\ 0 & y_1 - x_1 & y_2 - x_2 & y_3 - x_3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{l_3 \to l_3 - l_2 \\ l_4 \to l_4 - l_2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & y_1 - x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_2 - x_2 & 0 \\ 0 & 0 & y_2 - x_2 & y_3 - x_3 \end{vmatrix} \overset{l_4 \to l_4 - l_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & y_1 - x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_2 - x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_3 - x_3 \end{vmatrix}$$

$$= (y_1 - x_1)(y_2 - x_2)(y_3 - x_3).$$

Exercício 6.7
Seja $A = [a_{ij}]_n$ a matriz quadrada, de ordem n, cujos elementos são definidos por

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ 1 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Prove que $\det A = (-1)^{n-1}(n-1)$.

Resolução:

Temos
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo,
$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{l_1 \leftrightarrow l_n}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$\underset{\forall i \in \{2,\dots,n-1\}}{\overset{l_i \to l_i - l_1}{=}} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{l_n \to l_n + l_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$\overset{l_n \to l_n + l_3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \overset{\dots}{\overset{l_n \to l_n + l_{n-1}}{=}} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n-1 \end{vmatrix}$$
$$= -(-1)^{n-2}(n-1) = (-1)^{n-1}(n-1).$$

Exercício 6.8

Uma matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diz-se antissimétrica se $A^T = -A$. Mostre que, para $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ com n ímpar e A antissimétrica, se tem $\det A = 0$.

Resolução: Admitamos que n é ímpar e que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ é uma matriz antissimétrica. Uma vez que $|A| = |A^T|$, então $|A| = |-A|$. Como $|-A| = (-1)^n|A|$ e n é ímpar, temos $|A| = -|A|$. Logo, $|A| = 0$.

Exercício 6.9

Sejam $n, p, m \in \mathbb{N}$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{R})$ e $D \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes:

(a) $|A| = 0$ sse $A = 0$. (b) $|A| = 1$ sse $A = I_n$. (c) $|A+B| = |A| + |B|$. (d) $|-A| = -|A|$.

(e) $|-A| = |A|$. (f) $|3A| = 3|A|$. (g) $|AB| = |BA|$. (h) $|CD| = |DC|$.

(i) se $n = 3$, então $\left|2AA^T\right| = 8\left|A^2\right|$.

Resolução:

(a) Falso. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Então $A \neq 0_{2\times 2}$ e $|A| = 0$.

(b) Falso.

Seja $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Então $A \neq I_2$ e $|A| = 1$.

(c) Falso.

Sejam $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Então $|A+B| = 0$ e $|A| + |B| = 1 + 1 = 2$.

(d) Falso.

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Então $|-A| = (-1)^2 \times |A| = 1$ e $-|A| = -1$.

(e) Falso.

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Então $|-A| = (-1)^3 \times |A| = -1$ e $|A| = 1$.

(f) Falso.

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Então $|3A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9$ e $3|A| = 3$.

(g) Verdadeiro.

Se X e Y são matrizes quadradas com a mesma ordem, tem-se $|XY| = |X||Y|$. Logo

$$|AB| = |A||B| = |B||A| = |BA|.$$

(h) Falso.

Sejam $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Então $|CD| = |1|$ e $|DC| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

(i) Verdadeiro.

Para qualquer matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, temos

$$|2AA^T| = 2^3|AA^T| = 8|A||A^T| = 8|A||A| = 8|A^2|.$$

Exercício 6.10

Considere as seguintes matrizes de elementos reais:

$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & -1 & -1 \\ 2 & 2a & 3 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

com $\alpha, a \in \mathbb{R}$.

(a) Calcule $|A|, |B|, |C|$ e $|D|$.

(b) Diga, justificando, quais das matrizes indicadas são invertíveis. Para cada uma das matrizes invertíveis, indique o determinante da sua inversa.

Resolução:

(a) Calculemos os determinantes da matrizes A, B, C e D:

$$|A| = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \overset{l_1 \leftrightarrow l_2}{=} -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \overset{l_3 \to l_3 + l_1}{=} -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{(*)}{=} 0$$

(*) A matriz tem duas linhas iguais.

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & -1 & -1 \\ 2 & 2a & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{l_2 \to l_2 - al_1 \\ l_3 \to l_3 - 2l_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & -1-a^2 & -1-a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 - a^2$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{l_2 \to l_2 - \frac{3}{2}l_1 \\ l_3 \to l_3 - \frac{3}{2}l_1 \\ l_4 \to l_4 - l_1}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \overset{l_3 \to l_3 - l_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{l_3 \leftrightarrow l_4}{=} -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times (-\tfrac{1}{2}) \times 2 \times = 2.$$

(b) Uma matriz $X \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é invertível se e só se $|X| \neq 0$.

Assim, considerando que $|A| \neq 0$, $|C| \neq 0$ (para todo $a \in \mathbb{R}$, tem-se $-a^2 - 1 \neq 0$) e $|D| \neq 0$, as matrizes A, C e D são invertíveis. A matriz B não é invertível, uma vez que $|B| = 0$.

Exercício 6.11

Calcule a característica, o determinante, a matriz dos complementos algébricos, a adjunta e a inversa (caso exista) de cada uma das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$. (b) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. (c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Resolução:

(a) Seja

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz indicada, temos

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{l_2 \to l_2 + \frac{3}{2}l_1 \\ l_3 \to l_3 + \frac{3}{2}l_1}} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_3} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é equivalente por linhas a uma matriz em escada com 3 linhas não nulas; logo $car(A) = 3$.

Dos cálculos anteriores segue que $|A| = -(-2 \times 1 \times 1) = 2$.

A matriz dos complementos algébricos de A é a matriz $[\hat{a}_{ij}]_{i,j=1,2,3}$, onde $\hat{a}_{ij} = (-1)^{i+j}|A(i|j)|$.

Assim, sendo

$$\begin{aligned}
\hat{a}_{11} &= (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -4, & \hat{a}_{12} &= (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -3,\\
\hat{a}_{13} &= (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 3, & \hat{a}_{21} &= (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -4,\\
\hat{a}_{22} &= (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4, & \hat{a}_{23} &= (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2,\\
\hat{a}_{31} &= (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2, & \hat{a}_{32} &= (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2,\\
\hat{a}_{33} &= (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0,
\end{aligned}$$

a matriz dos complementos algébricos é a matriz

$$\begin{bmatrix} -4 & -3 & 3 \\ -4 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz adjunta de A é a transposta da matriz dos complementos algébricos de A. Logo,

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 3 \\ -4 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 2 \\ -3 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como $|A| \neq 0$, a matriz A é invertível e tem-se

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}Adj(A) = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Relativamente a esta matriz, temos:

- $car(A) = 3$;
- $|A| = 12$;
- matriz dos complementos algébricos: $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$;
- $Adj(A) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 3 & -5 & 4 \end{bmatrix}$;
- como $|A| \neq 0$, a matriz A é invertível e $A^{-1} = \frac{1}{|A|}Adj(A) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{-5}{12} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

(c) Seja
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Relativamente a esta matriz, temos:

- $car(A) = 4$;
- $|A| = 1$;
- matriz dos complementos algébricos: $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$;
- Adj(A)= $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;
- como $|A| \neq 0$, a matriz A é invertível e $A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A) = Adj(A)$.

Exercício 6.12

Dada a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$
sabemos que
$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{bmatrix} -12 & x & 6 & 18 \\ 0 & 0 & -18 & -18 \\ 26 & -6 & y & -12 \\ 2 & -6 & 14 & 6 \end{bmatrix},$$
com $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Determine x e y.

(b) Calcule o determinante da matriz A.

(c) Determine a inversa da matriz A.

Resolução:

(a) Por definição de matriz adjunta de A, tem-se
$$x = \hat{a}_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad y = \hat{a}_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -16.$$

(b) Calculando o determinante de A, reduzindo o problema ao cálculo do determinante de uma matriz triangular, obtemos

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{l_2 \to l_2 - 3l_1 \\ l_3 \to l_3 - 2l_1 \\ l_4 \to l_4 + 2l_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 3 \end{vmatrix} \overset{l_2 \to \frac{1}{2} l_2}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{l_3 \to l_3 - 3l_2 \\ l_4 \to l_4 + 3l_2}}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} \overset{l_4 \to l_4 + \frac{7}{3} l_3}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{18}{3} \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times 1 \times (-1) \times (-3) \times -\frac{18}{3} = -36.$$

(c) Como $|A| \neq 0$, a matriz A é invertível e temos

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{13}{8} & \frac{1}{6} & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{18} & \frac{1}{6} & -\frac{7}{18} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

Exercício 6.13

Para cada $k \in \mathbb{R}$, seja

$$A_k = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}.$$

(a) Determine os valores de k para os quais A_k é invertível.

(b) Para um dos valores encontrados em (a) e, utilizando determinantes, determine A_k^{-1}.

Resolução:

(a) A matriz A_k é invertível se e só se $|A_k| \neq 0$. Calculando o determinante de A_k, para cada $k \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\begin{vmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} \overset{l_1 \leftrightarrow l_3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & -1 & -1 \\ k & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{l_3 \to l3 - kl_1}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -k & -k^2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{l_3 \to l_3 - kl_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -k^2 + k \end{vmatrix} = -(1 \times (-1) \times (-k^2 + k)) = -k^2 + k.$$

Uma vez que $|A_k| = -k^2 + k$, então A_k é invertível se e só se $-k^2 + k \neq 0$, i.e.,A_k é invertível se e só se $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

(b) Consideremos $k = -1$. Tem-se $|A_{-1}| = -2$ e

$$Adj(A_{-1}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como $|A_{-1}| \neq 0$, A_{-1} é invertível e temos

$$(A_{-1})^{-1} = \frac{1}{|A_{-1}|} Adj(A_{-1}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Exercício 6.14

Resolva os seguintes sistemas de Cramer:

(a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

Resolução:

(a) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ a matriz simples do sistema.

Tem-se $|A| = -3$. Como $|A| \neq 0$, a matriz A é invertível. Uma vez que o sistema é um sistema a 3 equações e 3 incógnitas e A é invertível, o sistema é um sistema de Cramer. O sistema é possível determinado, pelo que tem uma única solução (a, b, c) onde

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}; \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}; \quad c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}.$$

Assim, $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ é a única solução do sistema.

Conjunto de soluções do sistema: $\{(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})\}$.

(b) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ a matriz simples do sistema.

Tem-se $|A| = 5$. Como $|A| \neq 0$, a matriz A é invertível. Uma vez que o sistema é um sistema a 3 equações e 3 incógnitas e A é invertível, o sistema é um sistema de Cramer. O sistema é possível determinado, pelo que tem uma única solução (a, b, c) onde

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5}; \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-1}{5} = -\frac{1}{5}; \quad c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{9}{5} = \frac{9}{5}.$$

Assim, $(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{9}{5})$ é a única solução do sistema.

Conjunto de soluções do sistema: $\{(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{9}{5})\}$.

(c) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ a matriz simples do sistema.

Tem-se $|A| = -1$. Como $|A| \neq 0$, a matriz A é invertível. Uma vez que o sistema é um sistema a 3 equações e 3 incógnitas e A é invertível, o sistema é um sistema de Cramer. O sistema é possível determinado, pelo que tem uma única solução (a, b, c) onde

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-2}{-1} = 2; \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1}{-1} = -1; \quad c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Assim, $(2, -1, 0)$ é a única solução do sistema.

Conjunto de soluções do sistema: $\{(2, -1, 0)\}$.

Exercício 6.15

Para cada uma das matrizes a seguir indicadas, diga se a matriz é definida positiva e se é semidefinida positiva.

(a) $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$. (b) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$. (c) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Resolução:

Uma matriz simétrica A é:

- definida positiva se e só se todos os seus menores principais primários são positivos.
- semidefinida positiva se e só se todos os seus menores principais são maiores ou iguais a 0.

(a) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Os menores principais da matriz A são os seguintes:

- menores principais de ordem 1: $|[4]| = 4$ e $|[5]| = 5$;
- menores principais de ordem 2: $|A| = 4$.

Todos os menores principais primários de A são maiores do que zero, pelo que a matriz é definida positiva. Portanto, a matriz A também é semidefinida positiva.

(b) Seja

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

A matriz tem elementos na diagonal principal que são negativos. Logo a matriz não é semidefinida positiva e, consequentemenete, também não é uma matriz definida positiva.

(c) Seja

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Os menores principais da matriz A são os seguintes:

- menores principais de ordem 1: $|[-1]| = -1$,$|[-1]| = -1$, $|[-2]| = -2$;
- menores principais de ordem 2: $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$, $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$, $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$;
- menores principais de ordem 3: $|A| = 0$.

A matriz tem menores principais negativos, logo não é semidefinida positiva. Por conseguinte, a matriz A também não é definida positiva.

(d) Seja

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Os menores principais de A são:

- menores principais de ordem 1:

$$\det([a_{11}]) = 1, \quad \det([a_{22}]) = 1, \quad \det([a_{33}]) = 1, \quad \det([a_{44}]) = 1.$$

- menores principais de ordem 2:

$$\det A_{\{1,2\}} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1, \quad \det A_{\{1,3\}} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0, \quad \det A_{\{1,4\}} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0,$$
$$\det A_{\{2,3\}} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1, \quad \det A_{\{2,4\}} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1, \quad \det A_{\{3,4\}} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1.$$

- menores principais de ordem 3:

$$\det A_{\{1,2,3\}} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0, \qquad \det A_{\{1,2,4\}} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0,$$
$$\det A_{\{1,3,4\}} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -1, \quad \det A_{\{2,3,4\}} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1.$$

- menores principais de ordem 4: $\det A = -1$.

Nem todos os menores principais são positivos ou nulos, logo a matriz não é semidefinida positiva. Por conseguinte, a matriz também não é definida positiva.

Exercício 6.16

Para $a, b \in \mathbb{R}$, considere a matriz
$$\begin{bmatrix} a & 1 & b \\ 1 & -1 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$
Determine para que valores de a e b a matriz é definida positiva.

Resolução:

A matriz é definida positiva se e só se todos os menores principais primários são positivos.

Os menores principais primários da matriz são os seguintes:

- $|[a]| = a$; $\quad \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -a - 1$; $\quad \begin{vmatrix} a & 1 & b \\ 1 & -1 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2a + 2 + b^2$.

Logo, a matriz é definida positiva se e só se

$$a > 0 \text{ e } -a - 1 > 0 \text{ e } 2a + 2 + b^2 > 0.$$

Uma vez que a condição anterior é impossível, então não existem valores de a e b para os quais a matriz seja definida positiva.

Exercício 6.17

Determine para que valores de $k \in \mathbb{R}$ a matriz

$$\begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

é definida positiva.

Resolução: A matriz A é definida positiva se e só se todos os menores principais primários são positivos.

Os menores principais primários da matriz são os seguintes:

$$|[-5]| = -5; \qquad \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4; \qquad \begin{vmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & k \end{vmatrix} = 4k+16;$$

$$\begin{vmatrix} -5 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -12k-48.$$

Assim, a matriz A é definida positiva se e só se $4k+16 > 0$ e $-12k-48 > 0$. .

7 Valores e vetores próprios

Exercícios e resoluções

Exercício 7.1

Seja f o endomorfismo do espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$ definido por $f(a,b) = (3a+4b, -2a-3b)$, para todo $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Mostre que $(-2,1)$ e $(1,-1)$ são vetores próprios de f.

(b) Diga, justificando, se f é automorfismo de $\mathbb{R}^2$.

Resolução:

(a) Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e h um enfomorfismo de V. Um vetor $v \in V$ diz-se um vetor próprio de h se $v \neq 0_V$ e $h(v) = \alpha v$, para algum $\alpha \in \mathbb{K}$; ao escalar α dá-se a designação de valor próprio de h associado ao vetor próprio v.

Considerando que $(-2,1) \neq (0,0)$, $(1,-1) \neq (0,0)$ e

$$\begin{aligned}
&f(-2,1) = (3\times(-2)+4\times 1, -2\times(-2)-3\times 1) = (-2,1) = 1\cdot(-2,1),\\
&f(1,-1) = (3\times(1)+4\times(-1), -2\times 1-3\times(-1)) = (-1,1) = (-1)\cdot(1,-1),
\end{aligned}$$

conclui-se que $(-2,1)$ e $(1,-1)$ são vetores próprios de f associados, respetivamente, aos valores próprios 1 e -1.

(b) Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Um endomorfismo h de V é um automorfismo de V se e só se 0 não é um valor próprio de h.

Da alínea anterior sabe-se que 1 e -1 são valores próprios de f. Como f é um endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ e $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, então f admite no máximo 2 valores próprios distintos. Assim, 1 e -1 são os únicos valores próprios de f. Uma vez que 0 não é valor próprio de f, concluimos que f é um automorfismo de $\mathbb{R}^2$.

Exercício 7.2

Seja h o endomorfismo do espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$ definido por $h(a,b) = (-b, 2a)$, para todo $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que h não admite valores próprios.

Resolução:

Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, λ é valor próprio de h se existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ tal que $h(a,b) = \lambda(a,b)$.

Da igualdade $h(a,b) = \lambda(a,b)$ segue que

$$\begin{cases} -b = \lambda a \\ 2a = \lambda b \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, obtemos $2a + \lambda^2 a = 0$, donde resulta $\lambda^2 = -2$ ou $a = b = 0$. Considerando que $\lambda^2 = -2$ não tem soluções reais, conclui-se que h não admite valores próprios.

Resolução alternativa:
Seja B_c a base canónica de $\mathbb{R}^2$. Determinemos a matriz de h em relação à base B_c. Uma vez que

$$\begin{aligned} h(1,0) &= (0,2) = 0(1,0) + 2(0,1), \\ h(0,1) &= (-1,0) = -1(1,0) + 0(0,1), \end{aligned}$$

tem-se

$$M(h; B_c, B_c) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Seja $A = M(h; B_c, B_c)$. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, λ é valor próprio de h se e só se $|A - \lambda I_2| = 0$. Então, considerando que

$$|A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2$$

e $\lambda^2 + 2 = 0$ não tem soluções em $\mathbb{R}$, conclui-se que h não admite valores próprios.

Exercício 7.3.
Sejam B a base canónica de $\mathbb{R}^3$, B' a base de $\mathbb{R}^3$ definida por $B' = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$M(f; \mathcal{B}', \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Diga, justificando, se $(1,2,3)$ é vetor próprio de f.

(b) Determine os valores próprios de f.

(c) Determine a dimensão do subespaço próprio de f associado ao valor próprio 1.

Resolução:

(a) Por definição de vetor próprio de um endomorfismo, $(1,2,3)$ é vetor próprio de f se

(i) $(1,2,3) \neq (0,0,0)$;

(ii) $f(1,2,3) = \lambda(1,2,3)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

No sentido de averiguarmos se $(1,2,3)$ é vetor próprio de f, determinemos $f(1,2,3)$.

Considerando que

$$(1,2,3) = 3(1,1,1) - 1(1,1,0) - 1(1,0,0),$$

o vetor coluna de $(1,2,3)$ relativamente à base $\mathcal{B}'$ é

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Logo, o vetor coluna de $f(1,2,3)$ relativamente à base $\mathcal{B}'$ é

$$M(f; \mathcal{B}', \mathcal{B}') \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

e, portanto $f(1,2,3) = 1.(1,1,1) - 1.(1,1,0) - 2(1,0,0) = (-2,0,-1)$.

Como $(-2,0,-1) \neq \lambda(1,2,3)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, concluímos que $(1,2,3)$ não é vetor próprio de f.

(b) Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, λ é valor próprio de f se e só se $|M(f;\mathcal{B}',\mathcal{B}') - \lambda I_3| = 0$. Ora, aplicando o Teorema de Laplace ao longo da linha 2 da matriz $M(f;\mathcal{B}',\mathcal{B}') - \lambda I_3$, temos

$$\begin{aligned}
|M(f;\mathcal{B}',\mathcal{B}') - \lambda I_3| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{2+2}(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)((1-\lambda)(-\lambda)+1).
\end{aligned}$$

Logo, dado $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ é valor próprio de } f \quad &\text{sse} \quad (1-\lambda)((1-\lambda)(-\lambda)+1) = 0 \\
&\text{sse} \quad 1-\lambda = 0 \text{ ou } (1-\lambda)(-\lambda)+1 = 0 \\
&\text{sse} \quad \lambda = 1.
\end{aligned}$$

Assim, 1 é o único valor próprio de g.

(c) Pretendemos determinar $\dim \mathbb{R}^3_{[f,1]}$, ou seja, sendo 1 valor próprio de f, pretende-se determinar m.g.(1). Ora, da alínea anterior sabe-se que m.a.(1) $= 1$. Por outro lado, como 1 valor próprio de f, temos $1 \leq$ m.g.(1). Logo, m.g.(1) $= 1$.

Resolução alternativa: Tem-se $\dim \mathbb{R}^3{}_{[f,1]} = \dim \mathbb{R}^3 - car(M(f;\mathcal{B}',\mathcal{B}') - 1.I_3)$.

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $M(f;\mathcal{B}',\mathcal{B}') - 1.I_3$, no sentido de determinarmos a característica desta matriz, obtemos

$$M(f;\mathcal{B}',\mathcal{B}') - 1.I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \leftrightarrow l_1]{} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[l_3 \leftrightarrow l_2]{} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Então, como $car(M(f;\mathcal{B}',\mathcal{B}') - 1.I_3) = car(U) = 2$, temos $\dim \mathbb{R}^3{}_{[f,1]} = 3 - 2 = 1$.

Exercício 7.4

Sejam (v_1,v_2,v_3,v_4) uma base de $\mathbb{R}^4$ e $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^4)$ tal que $M(h;(v_i),(v_i)) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Indique os valores próprios de h e bases para os respectivos subespaços próprios.

(b) Indique $\dim \mathrm{Im}h$. Justifique.

(c) Determine $\{v \in \mathbb{R}^4 : h(v) = -v\}$.

(d) Sendo $\mathcal{B}$ a base de $\mathbb{R}^4$ definida por $\mathcal{B} = (v_1+v_2, v_1+v_3, v_1+v_4, v_1)$, indique o determinante de $M(h;\mathcal{B},\mathcal{B})$.

Resolução:

(a) Seja $A = M(h; (v_i), (v_i))$. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
\lambda \text{ é valor próprio de } h \quad &\Leftrightarrow \quad |A - \lambda I_4| = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (-1)^{1+1}(2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (2-\lambda)(-1)^{1+1}(1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (2-\lambda)(1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 1] = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda = 2 \vee \lambda = 1 \vee \lambda = 2 \vee \lambda = 0.
\end{aligned}
$$

Logo, os valores próprios de h são 0, 1 e 2.

Determinação do subespaço próprio de h associado ao valor próprio 0.

O subsepaço próprio de h associado ao valor próprio 0 é o subespaço

$$\mathbb{R}^4_{[h,0]} = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid h(v) = 0 \cdot v\}.$$

Tem-se

$$
\begin{aligned}
\mathbb{R}^4_{[h,0]} &= \{v \in \mathbb{R}^4 \mid h(v) = 0 \cdot v\} \\
&= \{v \in \mathbb{R}^4 \mid h(v) - 0 \cdot v = 0_V\} \\
&= \{v \in \mathbb{R}^4 \mid (h - 0id_{\mathbb{R}^4})(v) = 0_V\} \\
&= \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 \in \mathbb{R}^4 \mid (A - 0I_4) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}.
\end{aligned}
$$

Assim, no sentido de determinarmos o conjunto anterior, necessitamos de resolver o sistema

$$(A - 0I_4) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $A = A - 0I_4$, temos

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[l_4 \to l_4 - l_3]{} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = U.$$

O sistema homogéneo com matriz simples U, e equivalente ao sistema inicial, é o sistema

$$\begin{cases} 2\alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases},$$

donde se obtem

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = -\alpha_4 \end{cases}.$$

Logo,

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^4_{[h,0]} & = & \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 \in \mathbb{R}^4 \,|\, \alpha_1 = \alpha_2 = 0, \alpha_3 = -\alpha_4\} \\ & = & \{-\alpha_4 v_3 + \alpha_4 v_4 \in \mathbb{R}^4 \,|\, \alpha_4 \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{\alpha_4(-v_3 + v_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, \alpha_4 \in \mathbb{R}\} \\ & = & < -v_3 + v_4 > . \end{array}$$

Como (v_1, v_2, v_3, v_4) é uma base de $\mathbb{R}^4$, esta sequência é linearmente independente. Logo (v_3, v_4) também é linearmente independente e, portanto, $-v_3 + v_4 \neq 0_V$. Assim, a sequência $(-v_3 + v_4)$ é linearmente independente e, portanto, $(-v_3 + v_4)$ é uma base de $\mathbb{R}^4_{[h,0]}$.

Determinação do subespaço próprio de h associado ao valor próprio 1.

Tem-se

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^4_{[h,1]} & = & \{v \in \mathbb{R}^4 \,|\, h(v) = 1 \cdot v\} \\ & = & \{v \in \mathbb{R}^4 \,|\, h(v) - 1 \cdot v = 0_V\} \\ & = & \{v \in \mathbb{R}^4 \,|\, (h - 1id_{\mathbb{R}^4})(v) = 0_V\} \\ & = & \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 \in \mathbb{R}^4 \,|\, (A - 1I_4) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \}. \end{array}$$

No sentido de determinarmos o conjunto anterior, vamos resolver o sistema

$$(A - 1I_4) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $A - 1I_4$, temos

$$A - 1I_4 = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right| \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_4]{} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| = U.$$

O sistema homogéneo com matriz simples U, e equivalente ao sistema inicial, é o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^4_{[h,1]} & = & \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 \in \mathbb{R}^4 \,|\, \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0\} \\ & = & \{\alpha_2 v_2 \in \mathbb{R}^4 \,|\, \alpha_1 \in \mathbb{R}\} \\ & = & < v_2 > . \end{array}$$

Como (v_1, v_2, v_3, v_4) é uma base de $\mathbb{R}^4$, esta sequência é linearmente independente. Logo (v_2) também é linearmente independente. Assim, a sequência (v_2) é uma base de $\mathbb{R}^4_{[h,1]}$.

Determinação do subespaço próprio de h associado ao valor próprio 2.

Tem-se

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^4_{[h,2]} & = & \{v \in \mathbb{R}^4 \,|\, h(v) = 2 \cdot v\} \\ & = & \{v \in \mathbb{R}^4 \,|\, h(v) - 2 \cdot v = 0_V\} \\ & = & \{v \in \mathbb{R}^4 \,|\, (h - 2id_{\mathbb{R}^4})(v) = 0_V\} \\ & = & \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 \in \mathbb{R}^4 \,|\, (A - 2I_4) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \}. \end{array}$$

No sentido de determinarmos o conjunto anterior, vamos resolver o sistema

$$(A-2I_4)\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Aplicando operações elementares à matriz $A-2I_4$, temos

$$A-2I_4=\begin{vmatrix}0&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&1&-1\end{vmatrix}\xrightarrow[l_4\to l_4+l_3]{}\begin{vmatrix}0&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&0\end{vmatrix}=U.$$

O sistema homogéneo com matriz simples U, e equivalente ao sistema inicial, é o sistema

$$\begin{cases}-\alpha_2=0\\-\alpha_3+\alpha_4=0\end{cases},$$

donde se obtem

$$\begin{cases}\alpha_2=0\\ \alpha_3=\alpha_4\end{cases}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^4_{[h,2]}&=\{\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3v_3+\alpha_4v_4\in\mathbb{R}^4\,|\,\alpha_2=0,\alpha_3=\alpha_4\}\\&=\{\alpha_1v_1+\alpha_4v_3+\alpha_4v_4\in\mathbb{R}^4\,|\,\alpha_1,\alpha_4\in\mathbb{R}\}\\&=\{\alpha_1v_1+\alpha_4(v_3+v_4)\in\mathbb{R}^4\,|\,\alpha_1,\alpha_4\in\mathbb{R}\}\\&=<v_1,v_3+v_4>.\end{aligned}$$

Como (v_1,v_2,v_3,v_4) é uma base de $\mathbb{R}^4$, esta sequência é linearmente independente. Logo (v_1,v_3+v_4) também é linearmente independente, pois, para quaisquer $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\alpha v_1+\beta(v_3+v_4)=0^4_{\mathbb{R}}\quad&\Rightarrow\quad\alpha v_1+0v_2+\beta v_3+\beta v_4=0^4_{\mathbb{R}}\\&\Rightarrow\quad\alpha=\beta=0.\end{aligned}$$

Como $\mathbb{R}^4_{[h,2]}=<v_1,v_3+v_4>$ e (v_1,v_3+v_4) é linearmente independente, então (v_1,v_3+v_4) é uma base de $\mathbb{R}^4_{[h,2]}$.

(b) Da alínea anterior sabe-se que $\dim\mathbb{R}^4_{[h,0]}=1$. Então, como $\operatorname{Nuc}h=\mathbb{R}^4_{[h,0]}$, temos $\dim\operatorname{Nuc}h=1$. Por outro lado, como h é um morfismo com domínio $\mathbb{R}^4$, tem-se

$$\dim\mathbb{R}^4=\dim\operatorname{Nuc}h+\dim\operatorname{Im}h.$$

Logo, $\dim\operatorname{Im}h=4-1=3$.

(c) Claramente, tem-se $\{0_{\mathbb{R}^4}\}\subseteq\{v\in\mathbb{R}^4:h(v)=-v\}$, pois $h(0_{\mathbb{R}^4})=0_{\mathbb{R}^4}=(-1)0_{\mathbb{R}^4}$. Por outro lado, da alínea (a) sabe-se que 0, 1 e 2 são os únicos valores próprios de h. Assim, -1 não é valor próprio de h e, por conseguinte, para todo $v\in\mathbb{R}^4\setminus\{0_{\mathbb{R}^4}\}$, $h(v)\neq -v$. Logo, $\{v\in\mathbb{R}^4:h(v)=-v\}=\{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

(d) As matrizes $A=M(h;(v_j),(v_i))$ e $B=M(h;\mathcal{B},\mathcal{B})$ são matrizes semelhantes, pois são matrizes do mesmo enfomorfismo. Logo A e B têm o mesmo polinónmio característico e, portanto, para todo $\lambda\in\mathbb{R}$, tem-se $|A-\lambda I_4|=|B-\lambda I_4|$. Então, como $|A-0I_4|=0$ (pois 0 é valor próprio de A), segue que $|B-0I_4|=0$, ou seja $|B|=0$.

Exercício 7.5

Seja $\mathcal{B}=(v_1,v_2,v_3)$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Para $a,b\in\mathbb{R}$, seja $f_{a,b}\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ tal que

$$M(f_{a,b};\mathcal{B},\mathcal{B})=\begin{bmatrix}1&a+1&-b\\1&1&1\\a&a&a+b+1\end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, $v_1 - v_3$ é vetor próprio de $f_{a,b}$.

(b) Determine os valores de a e de b para os quais 1 é valor próprio de $f_{a,b}$.

(c) Determine os valores de a e de b para os quais 0 é valor próprio de $f_{a,b}$ com multiplicidade geométrica 2.

Resolução:

(a) Uma vez que (v_1, v_2, v_3) é uma base de $\mathbb{R}^3$, esta sequência é linearmente independente. Logo (v_1, v_3) também é linearmente independente e, portanto, $v_1 - v_3 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. Além disso, tem-se

$$\begin{aligned} f_{a,b}(v_1 - v_3) &= f_{a,b}(v_1) - f_{a,b}(v_3) \\ &= (v_1 + v_2 + av_3) - (-bv_1 + v_2 + (a+b+1)v_3) \\ &= (1+b)v_1 + (1+b)(-v_3) \\ &= (1+b)(v_1 - v_3). \end{aligned}$$

Assim, $v_1 - v_3$ é vetor próprio de $f_{a,b}$ associado ao valor próprio $1 + b$.

(b) Seja $A = M(f_{a,b}; \mathcal{B}, \mathcal{B})$. Então 1 é valor próprio de $f_{a,b}$ se e só $|A - 1I_3| = 0$. Considerando que

$$\begin{aligned} |A - 1I_3| &= \begin{vmatrix} 0 & a+1 & -b \\ 1 & 0 & 1 \\ a & a & a+b \end{vmatrix} \overset{l_3 \to l_3 - al_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & a+1 & -b \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & b \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{2+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} a+1 & -b \\ a & b \end{vmatrix} = -[(a+1)b + ab] = -2ab - b, \end{aligned}$$

conclui-se que 1 é valor próprio de $f_{a,b}$ se e só se $-2ab - b = 0$, ou seja, se e só se $b = 0$ ou $a = -\frac{1}{2}$.

(c) Pretendemos determinar os valores de a e de b para os quais m.g.$(0) = 2$. Então, considerando que m.g.$(0) = \dim \mathbb{R}^3 - car(M(f_{a,b}; \mathcal{B}, \mathcal{B}) - 0I_3)$, pretendemos determinar os valores de a e de b tais que $car(M(f_{a,b}; \mathcal{B}, \mathcal{B})) = 1$.

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $M(f_{a,b}; \mathcal{B}, \mathcal{B})$, temos

$$\begin{aligned} M(f_{a,b}; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & a+1 & -b \\ 1 & 1 & 1 \\ a & a & a+b+1 \end{bmatrix} &\xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - l_1 \\ l_3 \to l_3 - al_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & a+1 & -b \\ 0 & -a & 1+b \\ 0 & -a^2 & a+b+1+ab \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow[l_3 \to l_3 - al_2]{} \begin{bmatrix} 1 & a+1 & -b \\ 0 & -a & 1+b \\ 0 & 0 & b+1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, $car(M(f_{a,b}; \mathcal{B}, \mathcal{B})) = 1$ se e só se $a = 0$ e $b = -1$. Logo, 0 é valor próprio de $f_{a,b}$ com multiplicidade geométrica 2 se e só se $a = 0$ e $b = -1$.

Exercício 7.6.
Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine os valores próprios e os vetores próprios de A. Indique as multiplicidades geométrica e algébrica de cada um dos valores próprios.

Resolução:

Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, λ é valor próprio de A se e só se $|A - \lambda I_3| = 0$. Então, considerando que A é uma matriz triangular, os valores próprios de A são os elementos da sua digonal principal. Logo, os valores próprios de A são o 2 e o 1. Tem-se m.a.$(2) = 1$ e m.a.$(1) = 2$, uma vez que 2 é uma raiz simples do polinómio carcaterístico de A e 1 é uma raiz dupla.

Determinemos os vetores próprios de A associados ao valor próprio 2, ou seja, determinemos os elementos não nulos de $M_{[A,2]} = \{y \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) \,|\, Ay = 2y\}$.

Tem-se

$$\begin{aligned} M_{[A,2]} &= \{y \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) \,|\, Ay = 2y\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) \,|\, (A - 2I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

No sentido de resolvermos o sistema $(A-2I_3)\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, apliquemos o método de eliminação de Gauss--Jordan à matriz $[A - 2I_3|0]$:

$$[A-2I_3|0] = \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_3]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow[l_1 \to l_1 + l_2]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_1 \to -l_1 \\ l_2 \to -l_2}]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Dos cálculos anteriores, concluimos que o sistema é equivalente a

$$\begin{cases} b = 0 \\ c = 0. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} M_{[A,2]} &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) \,|b = c = 0, a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) \,|a \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) \,|a \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Como $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, a sequência $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ é linearmente independente e, portanto, é uma base de $M_{[A,2]}$. Assim, m.g.$(2) = \dim M_{[A,2]} = 1$.

Determinemos, agora, os vetores próprios de A associados ao valor próprio 1, isto é, determinemos os elementos não nulos de $M_{[A,1]} = \{y \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) \,|\, Ay = y\}$.

Tem-se

$$
\begin{aligned}
M_{[A,1]} &= \{y \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) \mid Ay = y\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) \mid (A - I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) \mid \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) \,|a = c = 0, a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) \,|b \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) \,|b \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle .
\end{aligned}
$$

A sequência $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ é linearmente independente, pois $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e, portanto, é uma base de $M_{[A,1]}$. Assim, m.g.$(1) = \dim M_{[A,1]} = 1$.

Exercício 7.7.
Considere as seguintes matrizes, apenas com o valor próprio α,

$$
A_1 = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}.
$$

Mostre que em A_i se tem m.g.$(\alpha) = i$, $i = 1, 2, 3$.

Resolução:

Em A_i, $i = 1, 2, 3$, tem-se m.g.$(\alpha) = n - car(A_i - \alpha)$. Então, como $car(A_1 - \alpha I_3) = 2$, $car(A_2 - \alpha I_3) = 1$, $car(A_3 - \alpha I_3) = 0$, conclui-se que, em A_i, m.g.$(\alpha) = i$.

Exercício 7.8

Sabendo que A é uma matriz quadrada de ordem 3 que admite como valores próprios 1, -1 e 2, indique, justificando:

(a) Os valores próprios de A^2.

(b) Os valores próprios de $-A$.

(c) Os valores próprios de A^T.

(d) Os valores próprios de $2A^{-1}$.

(e) Os valores próprios de $(2A)^{-1}$.

Resolução:

(a) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é valor próprio de A, então λ^2 é valor próprio de A^2. Logo 1^2, $(-1)^2$ e 2^2 são valores próprios de A^2; 1 é valor próprio de A^2 com multiplicidade algébrica 2 e 4 é valor próprio de A^2 com multiplicidade algébrica 1. Como $A^2 \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, A^2 tem no máximo 3 valores próprios. Assim, 1 e 4 são os valores próprios de A^2.

(b) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é valor próprio de A, então, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha\lambda$ é valor próprio de αA. Logo, considerando $\alpha = -1$, segue que -1, $-(-1)$ e -2 são valores próprios de $-A$. Como $-A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, $-A$ tem no máximo 3 valores próprios. Assim, -1, 1 e -2 são os valores próprios de $-A$.

(c) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é valor próprio de A, então λ é valor próprio de A^T. Logo 1, -1 e 2 são valores próprios de A^T. Como $A^T \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, A^T tem no máximo 3 valores próprios. Assim, 1, -1 e 2 são os valores próprios de A^T.

(d) Uma vez que $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, A tem no máximo 3 valores próprios. Assim, 1, -1 e 2 são os únicos valores próprios de A. Como 0 não é valor próprio de A, então A é invertível e se $\lambda \in \mathbb{R}$ é valor próprio de A, λ^{-1} é valor próprio de A^{-1}. Logo 1, -1 e $\frac{1}{2}$ são valores próprios de A^{-1} e daqui resulta que 2×1, $2\times(-1)$ e $2\times\frac{1}{2}$ são valores próprios de $2A^{-1}$. Como $2A^{-1} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, $2A^{-1}$ tem no máximo 3 valores próprios distintos. Assim, 2, -2 e 1 são os únicos valores próprios de $2A^{-1}$.

(e) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é valor próprio de A, então, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha\lambda$ é valor próprio de αA. Logo 2×1, $2\times(-1)$ e 2×2 são valores próprios de $2A$. Como $2A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, $2A$ tem no máximo 3 valores próprios. Assim, 2, -2 e 4 são os únicos valores próprios de $2A$. Considerando que 0 não é valor próprio de $2A$, a matriz $2A$ é invertível e os seus valores próprios são 2^{-1}, $(-2)^{-1}$ e 4^{-1}. Uma vez que $(2A)^{-1} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, $(2A)^{-1}$ tem no máximo 3 valores próprios. Logo $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ são os únicos valores próprios de $(2A)^{-1}$.

Exercício 7.9

Seja $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ uma base do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$. Para cada $t \in \mathbb{R}$, considere o endomorfismo f_t de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$f_t(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3) = (\alpha_1 - \alpha_3)u_1 + (2\alpha_2 + t\alpha_3)u_2 + (t\alpha_2 + 2\alpha_3)u_3,$$

para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

(a) Determine $M(f_t; \mathcal{B}, \mathcal{B})$, para cada $t \in \mathbb{R}$.

(b) Determine os valores de t para os quais f_t não admite 0 como valor próprio. Justifique.

(c) Determine os subespaços próprios de f_0.

(d) Indique uma base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ formada por vetores próprios de f_0 e a matriz de f_0 em relação a $\mathcal{B}'$. Justifique.

Resolução:

(a) Para cada $t \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned} f_t(u_1) &= f(u_1 + 0u_2 + 0u_3) = u_1 + 0u_2 + 0u_3 \\ f_t(u_2) &= f(0u_1 + 1u_2 + 0u_3) = 0u_1 + 2u_2 + tu_3 \\ f_t(u_3) &= f(0u_1 + 0u_2 + 1u_3) = -u_1 + tu_3 + 2u_3. \end{aligned}$$

Logo,

$$M(f_t; B, B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & t \\ 0 & t & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Seja $A_t = M(f_t; B, B)$. Então

$$\begin{aligned} 0 \text{ é valor próprio de } f_t \quad &\Leftrightarrow \quad |A_t - 0I_3| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & t \\ 0 & t & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 2 & t \\ t & 2 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 4 - t^2 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \text{ ou } t = 2. \end{aligned}$$

Logo, 0 não é valor próprio de f_t se e só se $t \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

(c) Comecemos por determinar os valores próprios de f_0. Para $t = 0$, tem-se

$$M(f_0; B, B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Seja $A_0 = M(f_0; B, B)$. Então, dado $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} \lambda \text{ é valor próprio de } f_0 & \Leftrightarrow & |A_0 - \lambda I_3| = 0 \\ & \Leftrightarrow & \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ & \Leftrightarrow & (1-\lambda)(2-\lambda)^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = 2. \end{array}$$

Determinação do subespaço próprio de f_0 associado ao valor próprio 1.

Tem-se

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3_{[f_0,1]} & = & \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f_0(v) = 1.v\} \\ & = & \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f_0(v) - 1.v = 0_{\mathbb{R}^3}\} \\ & = & \{v \in \mathbb{R}^3 \mid (f_0 - id_{\mathbb{R}^3})(v) = 0_{\mathbb{R}^3}\} \\ & = & \{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 \in \mathbb{R}^3 \mid (A_0 - I_3) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}. \end{array}$$

Assim, no sentido de determinarmos o conjunto anterior, necessitamos de resolver o sistema

$$(A_0 - I_3) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o método de Gauss à matriz $A - I_3$, temos

$$A_0 - I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3 + l_2]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

O sistema homogéneo com matriz simples U, e equivalente ao sistema inicial, é o sistema

$$\begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3_{[f_0,1]} & = & \{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0\} \\ & = & \{\alpha_1 u_1 \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha_1 \in \mathbb{R}\} \\ & = & < u_1 > . \end{array}$$

A sequência (u_1) é linearmente independente, pois u_1 é um vetor da base (u_1, u_2, u_3). Então, como $\mathbb{R}^3_{[f_0,1]} =< u_1 >$ e (u_1) é linearmente independente, (u_1) é uma base de $\mathbb{R}^3_{[f_0,1]}$.

Determinação do subespaço próprio de f_0 associado ao valor próprio 2.

Tem-se

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3_{[f_0,2]} & = & \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f_0(v) = 2.v\} \\ & = & \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f_0(v) - 2.v = 0_{\mathbb{R}^3}\} \\ & = & \{v \in \mathbb{R}^3 \mid (f_0 - 2id_{\mathbb{R}^3}\})(v) = 0_{\mathbb{R}^3}\} \\ & = & \{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 \in \mathbb{R}^3 \mid (A_0 - 2I_3) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}. \end{array}$$

Considerando que

$$A_0 - 2I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

então o sistema homogéneo com matriz simples $A_0 - 2I_3$ é o sistema

$$\left\{ \ -\alpha_1 - \alpha_3 = 0 \right. ,$$

donde se obtem

$$\left\{ \ \alpha_1 = -\alpha_3 \right. .$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3_{[f_0,2]} &= \{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 \in \mathbb{R}^3 \,|\, \alpha_1 = -\alpha_3\} \\ &= \{-\alpha_3 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 \in \mathbb{R}^3 \,|\, \alpha_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\alpha_2 u_2 + \alpha_3(-u_1 + u_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= < u_2, -u_1 + u_3 > . \end{aligned}$$

A sequência $(u_2, -u_1 + u_3)$ é linearmente independente, pois, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \alpha u_2 + \beta(-u_1 + u_3) = 0_{\mathbb{R}^3} &\Rightarrow \alpha u_2 - \beta u_1 + \beta u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\Rightarrow \alpha = \beta = 0 \quad ((u_1, u_2, u_3) \text{ é linearmente independente}). \end{aligned}$$

Assim, considerando que $\mathbb{R}^3_{[f_0,2]} =< u_2, -u_1 + u_3 >$ e $(u_2, -u_1 + u_3)$ é linearmente independente, conclui-se que $(u_2, -u_1 + u_3)$ é uma base de $\mathbb{R}^3_{[f_0,2]}$.

(d) Uma vez que (u_1, u_2, u_3) é linearmente independente, tem-se $u_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, $u_2 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ e $-u_1 + u_3 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. Então, considerando que $u_1 \in \mathbb{R}^3_{[f_0,1]}$, $u_2 \in \mathbb{R}^3_{[f_0,2]}$ e $-u_1 + u_3 \in \mathbb{R}^3_{[f_0,2]}$, conclui-se que: u_1 é um vetor próprio de f_0 associado ao valor próprio 1; u_2 e $-u_1 + u_3$ são vetores próprios de f_0 associados ao valor proprio 2. Como (u_1) e $(u_2, -u_1 + u_3)$ são sequências linearmente independentes e vetores próprios associados a valores próprios distintos são linearmente independentes, segue que $(u_1, u_2, -u_1 + u_3)$ é linearmente independente. De facto, para quaisquer $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} &\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma(-u_1 + u_3) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\Rightarrow (\alpha - \gamma)u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\Rightarrow \alpha - \gamma = 0, \beta = 0, \gamma = 0 \qquad (u_1, u_2, u_3) \text{ é linearmente independente}) \\ &\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0. \end{aligned}$$

Como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ e $(u_1, u_2, -u_1 + u_3)$ é uma sequência linearmente independente formada por 3 vetores de $\mathbb{R}^3$, então $B' = (u_1, u_2, -u_1 + u_3)$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Considerando que u_1 é um vetor próprio de f_0 associado ao valor próprio 1 e u_2 e $-u_1 + u_3$ são valores próprios de f_0 associados ao valor próprio 2, tem-se

$$\begin{aligned} &f_0(u_1) = 1u_1 = 1u_1 + 0u_2 + 0(-u_1 + u_3), \\ &f_0(u_2) = 2u_2 = 0u_1 + 2u_2 + 0(-u_1 + u_3), \\ &f_0(-u_1 + u_3) = 2(-u_1 + u_3) = 0u_1 + 0u_2 + 2(-u_1 + u_3) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$M(f_0; B', B') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exercício 7.10

Considere, no espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, a base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ e o endomorfismo φ tal que

$$M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine os valores próprios de φ.

(b) Determine o subespaço próprio de φ associado ao valor próprio -2.

(c) Diga, justificando, se

i. φ é diagonalizável.

ii. φ é automorfismo de $\mathbb{R}^3$.

Resolução:

(a) Seja $A = M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B})$. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, λ é valor próprio de φ se e só se $|A - \lambda I_3| = 0$.
Então, considerando que

$$\begin{aligned}
|A - \lambda I_3| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -4 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+1} \times (1-\lambda) \times \begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)[(2-\lambda)(-\lambda) - 8] \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 8),
\end{aligned}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ é valor próprio de φ se e só se $(1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 8) = 0$, ou seja, se e só se $\lambda = 1$ ou $\lambda = 4$ ou $\lambda = -2$.

(b) Pretende-se determinar o subespaço vetorial

$$\mathbb{R}^3_{[\varphi,-2]} = \{v \in \mathbb{R}^3 \,|\, \varphi(v) = -2v\}.$$

Sendo $A = M(\varphi; B, B)$, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^3_{[\varphi,-2]} &= \{v \in \mathbb{R}^3 \,|\, \varphi(v) = -2v\} \\
&= \{v \in \mathbb{R}^3 \,|\, \varphi(v) + 2v = 0_{\mathbb{R}^3}\} \\
&= \{v \in \mathbb{R}^3 \,|\, (\varphi + 2id_{\mathbb{R}^3})(v) = 0_{\mathbb{R}^3}\} \\
&= \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \in \mathbb{R}^3 \,|\, (A + 2I_3) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}.
\end{aligned}$$

Para determinar o conjunto anterior, determinemos o conjunto de soluções do sistema

$$(A + 2I_3) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o método de Gauss à matriz $(A + 2I_3)$, temos

$$A + 2I_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \leftrightarrow l_3 - \frac{2}{3}l_1]{} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3 + \frac{1}{2}l_2]{} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

O sistema homogéneo com matriz simples U, e equivalente ao sistema inicial, é o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ 4\alpha_2 - 4\alpha_3 = 0 \end{cases}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^3_{[\varphi,-2]} &= \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \in \mathbb{R}^3 \,|\, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = \alpha_3\} \\
&= \{\alpha_3 v_2 + \alpha_3 v_3 \in \mathbb{R}^3 \,|\, \alpha_3 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{\alpha_3 (v_2 + v_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \alpha_3 \in \mathbb{R}\} \\
&= < v_2 + v_3 > .
\end{aligned}$$

(c) i. Considerando que φ é um endomorfismo de $\mathbb{R}^3$, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ e φ admite 3 valores próprios distintos, então φ é diagonalizável.

(c) ii. Um endomorfismo f de um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$ é um automorfismo de V se e só se 0 não é valor próprio de f. Da alinea (a) sabe-se que 1, 4 e -2 são os valores próprios de φ. Logo, como 0 não é valor próprio de φ, conclui-se que φ é um automorfismo de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 7.11

Sejam (v_1, v_2, v_3) uma base de $\mathbb{R}^3$ e $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ definido por

$$f(av_1 + bv_2 + cv_3) = (a - 3b + 3c)v_1 + (3a - 5b + 3c)v_2 + (6a - 6b + 4c)v_3,$$

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) Determine os valores próprios de f e a respectiva multiplicidade geométrica.

(b) Diga, justificando, se f é diagonalizável.

Resolução:

(a) Seja $B = (v_1, v_2, v_3)$. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, λ é valor próprio de f se e só se $|M(f; B, B) - \lambda I_3| = 0$.

Para deteminarmos os valores próprios de f, comecemos por determinar a matriz $M(f; B, B)$.

Temos

$$\begin{aligned} f(v_1) &= f(v_1 + 0v_2 + 0v_3) = v_1 + 3v_2 + 6v_3, \\ f(v_2) &= f(0v_1 + 1v_2 + 0v_3) = -3v_1 - 5v_2 - 6v_3, \\ f(v_3) &= f(0v_1 + 0v_2 + v_3) = 3v_1 + 3v_2 + 4v_3, \end{aligned}$$

logo

$$M(f; B, B) = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Tem-se

$$\begin{aligned} |M(f; B, B) - \lambda I_3| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} \overset{l_1 \leftrightarrow l_3}{=} - \begin{vmatrix} 6 & -6 & 4-\lambda \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 1-\lambda & -3 & 3 \end{vmatrix} \\ &\overset{\substack{l_2 \to l_2 - \frac{1}{2}l_1 \\ l_3 \to l_3 - \frac{1-\lambda}{6}l_1}}{=} - \begin{vmatrix} 6 & -6 & 4-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & 1+\frac{1}{2}\lambda \\ 0 & -2-\lambda & -\frac{(4-\lambda)(1-\lambda)}{6} + 3 \end{vmatrix} = -(-1)^{1+1} \times 6 \times \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1+\frac{1}{2}\lambda \\ -2-\lambda & -\frac{(4-\lambda)(1-\lambda)}{6} + 3 \end{vmatrix} \\ &= -6((-2-\lambda)(-\tfrac{(4-\lambda)(1-\lambda)}{6} + 3) - (-2-\lambda)(1+\tfrac{1}{2}\lambda)) \\ &= -(-2-\lambda)(-\lambda^2 + 2\lambda + 8). \end{aligned}$$

Então λ é valor próprio de f se e só se $-(-2-\lambda)(-\lambda^2 + 2\lambda + 8) = 0$, ou seja, se e só se $\lambda = -2$ ou $\lambda = 4$ ou $\lambda = -2$. Assim, 4 é um valor próprio de f com multiplicidade algébrica 1 e -2 é um valor próprio de f com multiplicidade algébrica 2.

Determinemos, agora, a multiplicidade geométrica de cada um dos valores próprios. Comecemos por determinar a multiplicidade geométrica do valor próprio -2. Considerando que

$$\text{m.g.}(-2) = \dim V - car(M(f; B, B) - (-2)I_3),$$

calculemos $car(M(f;B,B)+2I_3))$. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $M(f;B,B)+2I_3$, temos

$$M(f;B,B)+2I_3 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - l_1 \\ l_3 \to l_3 - 2l_1}]{} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

A matriz U é uma matriz em escada com uma linha não nula, logo $car(M(f;B,B)+2I_3) = 1$. Assim, m.g.$(-2) = 3-1 = 2$.

A determinação da multiplicidade geométrica do valor próprio 4 é imediata. De facto, como $1 \leq$ m.g.(4) e m.g.$(4) \leq$ m.a.(4), segue que m.g.$(4) = 1$.

(b) Considerando que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ e m.g.(-2) + m.g.$(4) = 3$, conclui-se que f é diagonalizável.

Exercício 7.12

Dê exemplo de um endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que admita -1 como valor próprio com multiplicidade algébrica 2 e seja diagonalizável. Justifique.

Resolução:

Seja f o endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuja matriz em relação à base canónica B_c de $\mathbb{R}^3$ é

$$M(f;B_c,B_c) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

ou seja, f é o endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$f(1,0,0) = (-1)(1,0,0), \quad f(0,1,0) = (-1)(0,1,0), \quad f(0,0,1) = 2(0,0,1).$$

Claramente, f é diagonalizável, pois existe a base B_c de $\mathbb{R}^3$ tal que $M(f;B_c,B_c)$ é diagonal. Além disso, -1 é valor próprio de f com multiplicidade algébrica 2. De facto, dado $\lambda \in \mathbb{R}$, λ é valor próprio de f se e só se $|M(f;B_c,B_c) - \lambda I_3| = 0$. Então, como

$$\begin{aligned} |M(f;B_c,B_c) - \lambda I_3| &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda), \end{aligned}$$

-1 é raiz dupla do polinómio característico de f, e portanto, m.a.$(-1) = 2$.

Exercício 7.13

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{5}{2} \\ -2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Determine uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}AP$ seja uma matriz diagonal.

Resolução:

Pretende-se determinar uma matriz $P \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}AP$ seja diagonal, ou seja, pretende-se determinar uma matriz P tal que $A = PDP^{-1}$, para alguma matriz diagonal D. Determinar uma matriz P nestas condições equivale a determinar uma matriz cujas colunas sejam vetores próprios de A e formem uma base de $\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{K})$. No sentido de determinarmos uma base de $\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{K})$ formada por vetores próprios de A, comecemos por determinar os valores próprios de A.

Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, λ é valor próprio de A se e só se $|A - \lambda I_3|$. Então, considerando que

$$\begin{aligned} |A - \lambda I_3| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & \frac{5}{2} \\ -2 & -1-\lambda & -5 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{3+3}(1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2-\lambda), \end{aligned}$$

conclui-se que λ é valor próprio de A se e só se $(1-\lambda)(\lambda^2-\lambda) = 0$, ou seja, se e só se $\lambda = 1$ ou $\lambda = 0$. Assim, os valores próprios de A são 1 e 0, sendo que m.a.$(1) = 2$ e m.a.$(0) = 1$.

Para determinar a base pretendida, determinemos seguidamente uma base para os susbepaços próprios de A associados a cada um dos valores próprios.

Determinação do subespaço próprio de A associado ao valor próprio 1.

Por definição de subespaço próprio de A associado ao valor próprio 1, tem-se

$$\begin{aligned} M_{[A,1]} &= \{y \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) \,|\, Ay = 1y\} \\ &= \{y \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) \,|\, Ay - 1y = 0_{3\times 1}\} \\ &= \{y \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) \,|\, (A - 1I_3)y = 0_{3\times 1}\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) \,\middle|\, (A - I_3)\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

O conjunto anterior corresponde ao conjunto de soluções do sistema

$$(A - I_3)\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $[A - I_3|0]$, temos

$$[A - I_3|0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{5}{2} & 0 \\ -2 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \to l_2 + 2l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Por conseguinte, o sistema anterior é equivalente ao sistema

$$\left\{ \; a + b + \tfrac{5}{2}c = 0 \right. ,$$

donde se obtem

$$\left\{ \; a = -b - \tfrac{5}{2}c \right. .$$

Assim,

$$\begin{aligned} M_{[A,1]} &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) \,\middle|\, a = -b - \tfrac{5}{2}c \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -b - \frac{5}{2}c \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) \,\middle|\, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ b\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) \,\middle|\, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

A sequência $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ é linearmente independente, pois, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\alpha\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Determinação do subespaço próprio de A associado ao valor próprio 0.

O subespaço próprio de A associado ao valor próprio 0 é o subespaço definido por:

$$\begin{aligned} M_{[A,0]} &= \{y \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}) \,|\, Ay = 0y\} \\ &= \{y \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}) \,|\, Ay - 0y = 0_{3\times1}\} \\ &= \{y \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}) \,|\, (A - 0I_3)y = 0_{3\times1}\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}) \,\middle|\, (A - 0I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

O conjunto anterior corresponde ao conjunto de soluções do sistema

$$(A - 0I_3) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $[A|0]$, temos

$$A = \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & \frac{5}{2} & 0 \\ -2 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \to l_2 + l_1]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to l_3 + \frac{2}{5} l_2]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

O sistema anterior é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{5}{2}\alpha_3 = 0 \\ -\frac{5}{2}\alpha_3 = 0 \end{cases},$$

donde se obtem

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\frac{1}{2}\alpha_2 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} M_{[A,0]} &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}) \,\middle|\, a = \frac{-}{1}2b, c = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}b \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}) \,\middle|\, b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ b \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}) \,\middle|\, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Uma vez que $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, então $\left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ é linearmente independente e, portanto, $\left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de $M_{[A,0]}$.

Uma vez que cada uma das sequências

$$\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \text{ e } \left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

é linearmente independente e os seus vetores estão associados a valores próprios distintos, a sequência

$$\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

também é linearmente independente. Como $\dim \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) = 3$, esta sequência é uma base de $\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$ formada por vetores próprios de A. Por conseguinte, a matriz

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

é invertível e tem-se

$$A = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Exercício 7.14

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

Justifique que A não diagonalizável.

Resolução:

A matriz A é diagonalizável se e só se a soma das multiplicidades geométricas dos valores próprios de A for a igual à ordem da matriz. Assim, no sentido de averiguar se A é diagonalizável, comecemos por determinar os valores próprios de A.

Dado $\lambda \in \mathbb{K}$, λ é um valor próprio de A se e só se $|A - \lambda I_4| = 0$. Então, considerando que

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \overset{l_1 \leftrightarrow l_3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{l_4 \leftrightarrow l_4 + \lambda l_1}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda^2 \end{vmatrix}$$

$$= -(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda^2 \end{vmatrix} = -\left((-1)^{1+1}(-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda^2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\lambda^2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= -(-\lambda^4 + 1)$$

resulta que λ é valor próprio de A se e só se $-(-\lambda^4 + 1) = 0$, ou seja, λ é valor próprio de A se e só se $\lambda \in \{1, -1, i, -i\}$.

(a) No caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, 1 e -1 são os únicos valores próprios de A e tem-se $\text{m.a.}(1) = \text{m.a.}(-1) = 1$. Então, considerando que, para cada valor próprio λ de A, temos $1 \leq \text{m.g.}(\lambda) \leq \text{m.a.}(\lambda)$, conclui-se que $\text{m.g.}(1) = \text{m.g.}(-1) = 1$. Consequentemente, a matriz A não é diagonalizável, pois A é uma matriz quadrada de ordem 4 e $\text{m.g.}(1) + \text{m.g.}(-1) = 2 \neq 4$.

(b) No caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, os valores próprios de A são 1, -1, i e $-i$. Então, como A é uma matriz quadrada de ordem 4 e tem 4 valores próprios distintos, a matriz A é diagonalizável.

Exercício 7.15.

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

(a) Determine os valores próprios de A.

(b) Justifique que A é diagonalizável. Determine uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $A = PDP^{-1}$.

(c) Calcule A^{10}.

Resolução:

(a) Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, λ é um valor próprio de A se e só se $|A - \lambda I_3| = 0$. Então, considerando que

$$\begin{aligned}
|A - \lambda I_3| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{l_1 \leftrightarrow l_3}{=} -\begin{vmatrix} -1 & 1-\lambda & -1 \\ 2-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&\overset{l_2 \leftrightarrow l_2 + (2-\lambda)l_1}{=} -\begin{vmatrix} -1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & (1-\lambda)(2-\lambda)-1 & -(2-\lambda) \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -(-1)^{1+1}(-1)\begin{vmatrix} (1-\lambda)(2-\lambda)-1 & -(2-\lambda) \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= ((1-\lambda)(2-\lambda)-1)(2-\lambda) - (-1)\times(-(2-\lambda)) \\
&= (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda)
\end{aligned}$$

resulta que λ é valor próprio de A se e só se $(2-\lambda)(\lambda^2-3\lambda) = 0$, ou seja, λ é valor próprio de A se e só se $\lambda \in \{0, 2, 3\}$.

(b) A matriz A é do tipo 3×3 e tem 3 valores próprios distintos, logo A é diagonalizável.

No sentido de determinarmos matrizes P e D nas condições indicadas, comecemos por determinar bases para os subespaços próprios de A associados a cada um dos seus valores próprios.

Subsespaço próprio de A associado ao valor próprio 0:

$$M_{[A,0]} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle; \ \dim \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 1.$$

Subsespaço próprio de A associado ao valor próprio 2:

$$M_{[A,2]} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle; \ \dim \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 1.$$

Subsespaço próprio de A associado ao valor próprio 3:

$$M_{[A,3]} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle; \ \dim \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 1.$$

Uma vez que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

são vetores próprios de A associados a valores próprios distintos, a sequência

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

é linearmente independente e, portanto, é uma base de $\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$ formada por vetores próprios de A.

Por conseguinte, a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é invertível e tem-se $A = PDP^{-1}$, onde

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(c) Considerando o resultado da alínea anterior, tem-se

$$\begin{aligned} A^{10} &= (PDP^{-1})^{10} = PD^{10}P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 20195 & -19683 & 19171 \\ -19683 & 19683 & -19683 \\ 19171 & -19683 & 20195 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Exercício 7.16

Considere as matrizes simétricas a seguir indicadas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Para cada uma das matrizes, encontre uma matriz ortogonal que as diagonalize.

(b) Diga se matriz é definida positiva e se é semidefinida positiva.

Resolução:

Toda a matriz real A simétrica é diagonalizável e Q^TAQ é diagonal para alguma matriz ortogonal Q.

Matriz A**.** Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Os valores próprios de A são: 2 (com multiplicidade algébrica 2) e 0 (com multiplicidade algébrica 1).

Determinando os subespaços próprios de A associados aos valores próprios 2 e 0, obtem-se:

$$M_{[A,2]} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle; \qquad M_{[A,0]} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

A sequência

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

é linearmente independente e, portanto, uma base de $\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$. Partindo da base anterior, obtem-se a base ortonormal

$$\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),(0,0,1),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)\right)$$

Então a matriz

$$Q=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

é ortogonal e tem-se $Q^TAQ = diag(2,2,0)$.

Matriz B. Seja

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Os valores próprios de B são: 6, 1 e -4.

Determinando os subespaços próprios de A associados aos valores próprios de A, obtem-se:

$$M_{[A,6]}=\left\langle\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}\right\rangle; \qquad M_{[A,1]}=\left\langle\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}\right\rangle; \qquad M_{[A,-4]}=\left\langle\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}\right\rangle.$$

A sequência

$$\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}\right)$$

é linearmente independente e, portanto, uma base de $\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$. Partindo da base anterior, obtem-se a base ortonormal

$$\left(\frac{1}{\sqrt{50}}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix},\frac{1}{\sqrt{50}}\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}\right)$$

Então a matriz

$$Q=\begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{50}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{50}} \\ \frac{3}{\sqrt{50}} & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{\sqrt{50}} \\ \frac{4}{\sqrt{50}} & \frac{3}{5} & -\frac{4}{\sqrt{50}} \end{bmatrix}$$

é ortogonal e tem-se $Q^TAQ = diag(6,1,-4)$.

(b) Uma matriz real simétrica é:

- definida positiva se e só se todos os seus valores próprios são positivos.
- semidefinida positiva se e só se todos os seus valores próprios são positivos ou nulos.

Relativamente à matriz A sabe-se que os seus valores próprios são: 2 (com multiplicidade algébrica 2) e 0 com (multiplicidade algébrica 1). Todos os valores próprios são ≥ 0, logo A é semidefinida positiva. A matriz não é definida positiva porque existe um valor próprio nulo.

No que respeita à matriz B, os seus valores próprios são: 6, 1 -4. Há um valor próprio negativo -4, logo B não é semidefinida positiva nem definida positiva.

Exercício 7.17

Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(a) Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, todo o vetor próprio de f é também um vetor próprio de $f \circ f$.

(b) Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, se $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ são vetores próprios de f associados a valores próprios distintos, então $v_1 + v_2$ é vetor próprio de f.

(c) Se $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ admite 0 como valor próprio com multiplicidade algébrica 2, então $\dim \operatorname{Nuc} g = 2$.

(d) Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, se os valores próprios de A são todos distintos, então A é diagonalizável.

(e) Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, se A admite n valores próprios distintos, então A é diagonalizável.

(f) Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, se A é invertível, então AB e BA têm o mesmo polinómio característico.

Resolução:

(a) A afirmação é verdadeira.

Se $v \in \mathbb{R}^n$ é valor próprio de f, então $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ e existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f(v) = \lambda v$. Logo $(f \circ f)(v) = f(f(v)) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v$. Logo, v é vetor próprio de f associado ao valor próprio λ^2.

(b) A afirmação é falsa.

Seja $B_c = ((1,0),(0,1))$ a base canónica de $\mathbb{R}^2$ e f o endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ definido por $f(1,0) = (1,0)$ e $f(0,1) = (0,2)$. Então $(1,0)$ é um vetor próprio de f associado ao valor próprio 1, pois $(1,0) \neq (0,0)$ e $f(1,0) = 1(1,0)$; $(0,1)$ é um vetor próprio de f associado ao valor próprio 2, uma vez que $(0,1) \neq (0,0)$ e $f(0,1) = 2(0,1)$. No entanto, $(1,0) + (0,1) = (1,1)$ não é vetor próprio de f, pois

$$f(1,1) = f((1,0) + (0,1)) = f(1,0) + f(0,1) = (1,2)$$

e $(1,2) \neq \lambda(1,1)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) A afirmação é falsa.

Seja g o endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuja matriz em relação à base canonica de $\mathbb{R}^3$ é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então 0 é valor próprio de g com multiplicidade algébrica 2. De facto, dado $\lambda \in \mathbb{R}$, λ é valor próprio de g sse $|A - \lambda I_3| = 0$. Considerando que

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda),$$

então λ é valor próprio de g se e só se $(-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda) = 0$. Logo 0 é raiz dupla do polinómio característico de g e, portanto m.a.$(0) = 2$.

A multiplicidade geométrica de 0 é diferente de 2, pois

$$\begin{aligned} \text{m.g.}(0) &= \dim \mathbb{R}^3_{[f,2]} \\ &= \dim \operatorname{Nuc}(f - 0id_{\mathbb{R}^3}) \\ &= \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im}(f - 0id_{\mathbb{R}^3}) \\ &= 3 - car(A - 0I_3) \\ &= 3 - 2 = 1. \end{aligned}$$

(d) A afirmação é falsa.

Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$.

Como verificámos no exercício 6.15, a matriz tem dois valores próprios: -1 e 1. Os valores próprios de A são todos distintos, mas a matriz A não é diagonalizável.

(e) A afirmaçao é verdadeira.

Admitamos que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admite n valores próprios distintos; sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ esses valores próprios. Seja f o endomorfismo de $\mathbb{K}^n$ cuja matriz relativamente à base canónica B_c de $\mathbb{K}^n$ é A. Então $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são valores próprios de f. Sejam $v_1, \ldots, v_n$ vetores próprios de f associados, respetivamente, aos valores próprios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Como $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sao valores próprios distintos dois a dois, então $(v_1, \ldots, v_n)$ é lineramente independente. Logo, como $\dim \mathbb{K}^n = n$, $B = (v_1, \ldots, v_n)$ é uma base de V formada por vetores próprios de f e tem-se

$$M(f; B, B) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$A = M(f; B_c, B_c) = M(id_{\mathbb{R}^3}; B, B_c)M(f; B, B)M(id_{\mathbb{R}^3}; B_c, B),$$

onde $P = M(id_{\mathbb{R}^3}; B, B_c)$ é uma matriz invertível e $P^{-1} = M(id_{\mathbb{R}^3}; B_c, B)$. Logo A é semelhante a uma matriz diagonal e, portanto, A é diagonalizável.

(f) A afirmação é verdadeira.

Admitamos que A é invertível. Então existe $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$. Logo

$$\begin{aligned} p_{AB}(x) &= |AB - xI_n| \\ &= |AB - x(AA^{-1})| \\ &= |A(B - xA^{-1})| \\ &= |A||(B - xA^{-1})| \\ &= |(B - xA^{-1})||A| \\ &= |(B - xA^{-1})A| \\ &= |BA - x(A^{-1}A)| \\ &= |BA - xI_n| \\ &= p_{BA}(x). \end{aligned}$$