$A^2 = A \times A$

$A+B = [a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$

$A+B = B+A$

$(A+B)+C = A+(B+C)$

$A + 0_{m\times n} = A$

Transposta

$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}$

se $A' = [-a_{ij}]_{m\times n}$ então $A+A' = 0_{m\times n}$

$\alpha \cdot A = [\alpha a_{ij}]_{m\times n}$

$(A^T)^T = A$

se A e B são do mesmo tipo $(A+B)^T = A^T + B^T$

$(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$

$\left[\begin{matrix}\vdots\\ \vdots\end{matrix}\middle|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right] \rightarrow$ sistema homogéneo

→ Multiplicação de matrizes

$A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$

$A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$

$(2A^T)^{-1} = \frac{1}{2}(A^T)^{-1} = \frac{1}{2}(A^{-1})^T$

$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I_m$

$(A^{-1})^{-1} = A$

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

$\left[\begin{matrix}2&0&0\\0&-3&0\\0&0&\frac{2}{3}\end{matrix}\middle| I_3\right] \rightarrow \left[I_3\middle|\begin{matrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&-\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{3}{2}\end{matrix}\right]$ logo $A^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&-\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{3}{2}\end{bmatrix}$

- A característica da matriz A é o número de elementos pivô que contamos depois da condensação de Gauss, $r(A)$

- Seja $AX = B$, o sistema é
  - possível se $r([A|B]) = r(A)$
  - possível e determinado se o nº de incógnitas $= r(A)$
  - possível e indeterminado se nº de incógnitas $> r(A)$

- O sistema $AX = B$ é possível e determinado se e só se A é invertível

- Um sistema de equações diz-se
  - possível se existe pelo menos uma solução
  - impossível se não existe solução
  - possível e determinado se só há uma solução
  - possível e indeterminado se tem vários soluções

- Transformações elementares

sistemas		determinantes
troca linhas	$L_i \leftrightarrow L_m$	$[L_i \leftrightarrow L_j] \rightarrow -[\ ]$
multiplicar por escalar	$L_i \leftarrow \alpha L_i$	$[L_i \leftarrow \alpha L_i] \rightarrow \frac{1}{\alpha}[\ ]$
adicionar linhas	$L_i \leftarrow L_i + L_m$	

- Complemento algébrico $= (-1)^{l+c} \times \det(A)$
- Se A não é invertível, o sistema ou é impossível ou possível indeterminado
- Se A tem uma linha/coluna toda formada por 0 $\Rightarrow \det A = 0$
- Se A tem duas linhas iguais então $\det(A) = 0$
- O sistema é de Cramer se a matriz A é invertível

$\det(A^T) = \det(A)$

$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

$\det(AB) = \det A \cdot \det B$

$Adj(A) = [\Delta_{ij}]^T_{m\times n}$

$A\cdot Adj(A) = Adj(A)\cdot A = |A|\, I_m$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)$

→ Sistema de Cramer

$$\begin{cases}2x_2 + x_3 = 1\\ x_1 + x_2 + x_3 = 1\\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2\end{cases}$$

$x_1 = \frac{|A_{x_1}|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix}1&2&1\\1&1&1\\2&-1&2\end{vmatrix}}{\det A}$

B é invertível porque $\det B \neq 0$. A inversa de B, B^{-1} é a solução da equação $Bx = I_3$ onde $x = [x_{ij}]_{3\times 3}$. Pretende-se conhecer a incógnita x_{22}

$Bx = I_3 \Rightarrow B \begin{bmatrix}x_{12}\\x_{22}\\x_{32}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$

- Pela regra de Cramer

$B = \begin{bmatrix}2&1&-1\\1&1&1\\-1&0&7\end{bmatrix}$ $\quad x_{22} = \frac{\det\begin{bmatrix}2&0&-1\\1&1&1\\-1&0&7\end{bmatrix}}{\det B}$

- o produto da inversa é igual à inversa do produto por ordem contrária

$(AB^{-1}C)^{-1} = C^{-1}(B^{-1})A^{-1} = C^{-1}BA^{-1}$

- $M(X+M) = C^TAC \Rightarrow X+M = M^{-1}C^TAC \Rightarrow X = M^{-1}(C^TAC) - M$

- Matriz simétrica $\Rightarrow A = A^T$

$\underset{4\times 3}{\begin{bmatrix}2&1&2\\-1&2&3\\1&-1&2\\4&1&0\end{bmatrix}} \cdot \underset{3\times 3}{\begin{bmatrix}0&1&2\\3&-2&0\\0&1&0\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}3&2&2\\-6&0&-2\\-3&6&2\\3&2&8\end{bmatrix}$

- A característica da matriz A é o nº de elementos que contarmos depois da condensação de Gauss

  - Se o $\det A \neq 0$ então a matriz é invertível e a característica é máxima

- uma base $\mathbb{R}^n$ com n vetores $\dim \mathbb{R}^n = n$ e $\dim A = r(A)$
  → tem no máximo n de dimensão
  → para fazer a dimensão coloca-se os vetores em linhas e vê-se a característica

---

- Cálculo da base: $W = \{(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5 : a-b = d-2b = c-2b = e = 0\}$

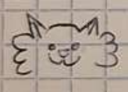
$$\begin{cases} a-b=0 \\ d-2b=0 \\ c-2b=0 \\ e=0 \end{cases} = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{método de Gauss}} \begin{cases} a=b \\ d=2b \\ e=0 \\ c=2b \end{cases}$$

$W = \{(b,b,0,2b,2b), b \in \mathbb{R}\} = \{b(1,1,0,2,2), b \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1,0,2,2) \rangle$

$(x,y,z) = \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,1,1)$ (3.a. teste estranho)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = x \\ \alpha_2 + \alpha_3 = y \\ \alpha_3 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = x \\ \alpha_2 = y - z \\ \alpha_3 = z \end{cases}$$

$f(x,y,z) = f(\alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,1,1)) =$
$= \alpha_1(f(1,0,0)) + \alpha_2(f(0,1,0)) + \alpha_3(f(0,1,1))$
$= x(1,0,0) + (y-z)(1,1,0) + z(0,1,0)$
$= (x+y-z, y-z+z, 0) = (x+y-z, y, 0)$



- Para identificar um sistema de eq. lineares cuja solução seja $\langle e \rangle$ → faz-se o "sistema" e depois passar para matriz para encontrar as condições $\left[\begin{array}{c|c} a+b \cdots & x \\ \cdots & y \end{array}\right]$ $(x,y) = a(1,0) + b \ldots$

$f(S) = \{f(x,y,z,w) \mid (x,y,z,w) \in S\} = \ldots$ coloco no $(x,y,z \ldots)$ com as condições de y e só depois aplico f

---

- Para B ser uma base de S, é necessário que os vetores sejam vetores de S, L.I. e que gerem S. (No entanto, ... não verificam as condições ...) ...

- Para passar de uma base para outra basta fazer a matriz

$B' = \{(1,0,1,0), (0,1,0,1), (-1,0,1,0), (0,1,0,2)\}$
$f(1,0,0) = (2,1,0,0) = (1,2,-1,-1)_{B'}$
$(2,1,0,0) = a(1,0,1,0) + b \ldots$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} a-c=2 \\ b+d=1 \\ c=-1 \\ d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=-1 \\ d=-1 \end{cases}$$

- S é um subespaço vetorial de V se: $S \neq \emptyset$, se $u, v \in S$ então $u+v \in S$, se $v \in S$ então $\lambda v \in S$

- Para ver se vetores são L.I, colocar numa matriz e ver se alguma das linhas se anula. Se se anular então esse vetor não é L.I

- Base é o conjunto maximal de vetores L.I

- Dimensão é o nº de conjuntos da base = característica da matriz dos vetores $r(A)$

- f é uma transformação linear se: $f(0) = \vec{0}$; $f(-v) = -f(v)$
$f(x+y) = f(x) + f(y)$; $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

- $\mathrm{Im} f = \{f(v) \mid v \in \mathbb{R}^n\}$ • $\mathrm{Nuc} f = \{v \in \mathbb{R}^n \mid f(v) = (0, \ldots 0)\}$

$\mathrm{Im} B = \{f(x,y,z) : x,y,z \in \mathbb{R}\}$

$= \{(x-z, 2x-y) : x,y,z \in \mathbb{R}\} = \{x(1,2) + y(0,-1) + z(-1,0)\}$ $x,y,z \in \mathbb{R}$

$= \langle (1,2), (0,-1), (-1,0) \rangle = \langle (0,-1), (-1,0) \rangle$ ◦ (1,2) é combinação linear dos outros é L.D.

$\mathrm{Nuc} B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (0,0,0)\}$ } substituir pelas "condições"

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-z, 2x-y) = (0,0,0)\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-z=0 \quad 2x-y=0\} = \{(x,2x,x) : x \in \mathbb{R}\}$

$= \langle (1,2,1) \rangle$

- $M(g \circ f, B, B') = M(g, B_2, B') \cdot M(f, B, B_2)$

- Para encontrar os valores próprios: $\det |A - \lambda I_n|$

- Para encontrar o vetor próprio para um $\lambda = a$ $\left[\begin{array}{cc|c} 1-a & 2 & 0 \\ 0 & 2-a & 0 \end{array}\right] \ldots$ passar para incógnitas e vero que dá.

- Determinar uma base, a partir de $W = \{(a \ldots) \mid \text{condição}\}$
  → passar para matriz e colocar tudo em função da mesma incógnita → ver os vetores que dá e ficar com aqueles que são L.I

- $U = \langle (a \ldots), (b \ldots), (c \ldots) \rangle \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & y \\ & & & \vdots \end{array}\right]$ e ver as condições

- $U \cap H = \{(x,y, \ldots) \in \mathbb{R}^n \mid \text{condições}\}$ → colocar em matriz $\left[\begin{array}{c|c} \vdots & 0 \\ \vdots & 0 \\ & \vdots \end{array}\right]$ e depois colocar tudo na mesma incógnita.

—//—

$B = ((1,0,1), (0,1,0), (-1,0,1))$ $f(2,3,-2) = (4,0,1,2)$

- Caso não esteja na mesma base

$(2,3,2) = 0(1,0,1) + 5(0,1,0) - 2(-1,0,1)$ ← mesma base

$$M(f, B, B_4) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Tem de se fazer sempre!!

o resultado multiplicar pelos vetores da base de chegada!

$f(2,3,-2) = 4(1,0,0,0) + 0(0,1,0,0) + 1(0,0,1,0) + 2(0,0,0,1)$