1. Matrizes

2. Sistemas de equações lineares
    - Geometria e sistemas de equações lineares
    - Definições e exemplos
    - Classificação de sistemas
    - Resolução de sistemas
    - Cálculo da inversa
    - Exemplos simples de cálculo da inversa

Geometria e sistemas de equações lineares

Considere-se o sistema de equações:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} & -y & +2z & =3\\ 2x & +3y & -z & =2\\ x & & +2z & =-1\end{array}\right. .$$

Este sistema tem uma única solução $(-27, 23, 13)$.

Do ponto de vista geométrico o que significa a solução?

1. os três planos de $\mathbb{R}^3$ de equações cartesianas $-y+2z=3$, $2x+3y-z=2$ e $x+2z=-1$ intersetam-se num único ponto de coordenadas $(-27, 23, 13)$;
2. o vetor $(3,2,-1)$ é combinação linear dos vetores $(0,2,1)$, $(-1,3,0)$ e $(2,-1,2)$ e as coordenadas são -27, 23 e 13, isto é,

$$(3,2,-1) = -27(0,2,1) + 23(-1,3,0) + 13(2,-1,2).$$

Notar que o sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrl} & -y & +2z & = 3 \\ 2x & +3y & -z & = 2 \\ x & & +2z & = -1 \end{array}\right.$$

é equivalente à equação matricial

$$x\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

ou seja, equivalente à equação matricial

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Sendo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais ou complexos, não todos nulos,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

é um polinómio de grau um nas incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Se b é um número, uma equação do tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

é uma equação linear em n incógnitas.

Definição

Sejam $p, n \in \mathbb{N}$. Chama-se sistema de p equações lineares em n incógnitas, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a um conjunto de p equações lineares que se representa por:

$$\left\{\begin{array}{lllll} a_{1\,1}x_1 & +a_{1\,2}x_2 & + \cdots & +a_{1\,n}x_n & = b_1 \\ a_{2\,1}x_1 & +a_{2\,2}x_2 & + \cdots & +a_{2\,n}x_n & = b_2 \\ & & & & \vdots \\ a_{p\,1}x_1 & +a_{p\,2}x_2 & + \cdots & +a_{p\,n}x_n & = b_p \end{array}\right.$$

onde $a_{i\,j}$ e b_i representam números, para $i = 1, \ldots, p$ e $j = 1, \ldots, n$.

Se $b_i = 0$, para $i = 1, \ldots, p$, então o sistema diz-se um sistema homogéneo .

$a_{i\,j}$ $\rightarrow$ *coeficientes do sistema* b_i $\rightarrow$ *termos independentes*.

Um sistema é caraterizado por duas matrizes:

- matriz simples (matriz dos coeficientes) $A = \begin{bmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \cdots & a_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p\,1} & a_{p\,2} & \cdots & a_{p\,n} \end{bmatrix}$,
- matriz dos termos independentes $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix}$.

Representando as variáveis por $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, o sistema é equivalente à equação matricial $AX = B$.

A matriz $[A\,B]$ diz-se a matriz ampliada do sistema.

Definição

Dado um sistema $AX = B$ de p equações lineares em n incógnitas, chama-se solução do sistema a uma sequência

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

tal que a igualdade seguinte é válida

$$A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = B.$$

Definição

Dois sistemas dizem-se equivalentes se admitem o mesmo conjunto de soluções.

Definição

Um sistema de equações lineares diz-se:

- impossível se não existem soluções do sistema;
- possível se existe pelo menos uma solução do sistema;
- possível e determinado se existe uma única solução do sistema;
- possível e indeterminado se existem várias soluções do sistema.

Exemplo 1

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & = -1 \\ & x_2 & & = 2 \\ & & x_3 & = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x_1 & = -3 \\ x_2 & = 2 \\ x_3 & = -1 \end{array}\right.$$

Matriz ampliada do sistema inicial:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Conjunto das soluções $=\{\ (-3,\ 2,\ -1)\}$

Exemplo 2

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x_1 & -x_2 & +2x_3 & & =-1 \\ & x_2 & & +x_4 & =0 \\ & & & -x_4 & =2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 1-2x_3 \\ x_2 = 2 \\ x_4 = -2 \end{array}\right.$$

Matriz ampliada do sistema inicial:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Conjunto das soluções $=\{(1-2\lambda, 2, \lambda, -2) : \lambda \in \mathbb{R}\}$

Definição

Diz-se que uma matriz está em forma de escada quando:

1. se a linha k da matriz não é toda constituída por zeros, então a linha $k+1$ (se existir) tem mais zeros no início da linha do que a linha k;
2. se existirem linhas todas constituídas por zeros, elas ficam abaixo de todas as outras linhas.

O primeiro elemento não nulo de cada linha é designado elemento pivô dessa linha (tal elemento pode ser diferente de 1 e variar de linha para linha).

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & * & * & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Proposição

As transformações seguintes não alteraram o conjunto de soluções de um sistema de equações lineares:

- trocar a ordem das equações;
- multiplicar os dois membros de uma equação $e_1 = e_2$ por um escalar não nulo, i.e.,
$$\text{se } \beta \neq 0, \quad \beta e_1 = \beta e_2 \Leftrightarrow e_1 = e_2$$
- substituir uma equação pela sua soma, membro a membro, com outra equação multiplicada por um escalar qualquer, i.e.,
$$\begin{cases} e_1 & = e_2 \\ e_1' & = e_2' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 & = e_2 \\ \beta e_1 + e_1' & = \beta e_2 + e_2' \end{cases}$$

Estas transformações designam-se transformações elementares.

Exemplo 3

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} & 2x_2 & +x_3 & -x_4 = & 1\\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & = & -1\\ 3x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +x_4 = & 0\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{rrrr|r} 0 & 2 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 0 & -1\\ 3 & -2 & 2 & 1 & 0\end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrr} x_1 & -2x_2 & +x_3 & = & -1\\ & 2x_2 & +x_3 & -x_4 = & 1\\ 3x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +x_4 = & 0\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1\\ 3 & -2 & 2 & 1 & 0\end{array}\right]$$

$(eq_1 \leftrightarrow eq_2)$ $\qquad$ $(L_1 \leftrightarrow L_2)$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrr} x_1 & -2x_2 & +x_3 & = & -1\\ & 2x_2 & +x_3 & -x_4 = & 1\\ & 4x_2 & -x_3 & +x_4 = & 3\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 4 & -1 & 1 & 3\end{array}\right]$$

$(eq_3 \leftarrow -3eq_1 + eq_3)$ $\qquad$ $(L_3 \leftarrow -3L_1 + L_3)$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrrl} x_1 & -2x_2 & +x_3 & & = -1 \\ & x_2 & +\frac{1}{2}x_3 & -\frac{1}{2}x_4 & = \frac{1}{2} \\ & 4x_2 & -x_3 & +x_4 & = 3 \end{array} \right. \qquad \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$(eq_2 \leftarrow \tfrac{1}{2} eq_2) \qquad (L_2 \leftarrow \tfrac{1}{2} L_2)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrrl} x_1 & -2x_2 & +x_3 & & = -1 \\ & x_2 & +\frac{1}{2}x_3 & -\frac{1}{2}x_4 & = \frac{1}{2} \\ & & -3x_3 & +3x_4 & = 1 \end{array} \right. \qquad \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & +1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 1 \end{array} \right]$$

$$(eq_3 \leftarrow -4eq_2 + eq_3) \qquad (L_3 \leftarrow -4L_2 + L_3)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrrl} x_1 & -2x_2 & +x_3 & & = -1 \\ & x_2 & +\frac{1}{2}x_3 & -\frac{1}{2}x_4 & = \frac{1}{2} \\ & & x_3 & -x_4 & = -\frac{1}{3} \end{array} \right. \qquad \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & +1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} \end{array} \right]$$

$$(eq_3 \leftarrow -\tfrac{1}{3} eq_3) \qquad (L_3 \leftarrow -\tfrac{1}{3} L_3)$$

O conjunto das soluções do sistema pode já ser determinado com alguma facilidade, por substituição :

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} x_1 & -2x_2 & +x_3 & & = & -1 \\ & x_2 & +\frac{1}{2}x_3 & -\frac{1}{2}x_4 & = & \frac{1}{2} \\ & & x_3 & -x_4 & = & -\frac{1}{3} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & -x_4 + \frac{2}{3} \\ x_2 & = & \frac{2}{3} \\ x_3 & = & x_4 - \frac{1}{3} \end{array}\right. ,$$

pelo que o conjunto das soluções do sistema é

$$\left\{(\frac{2}{3} - \lambda,\ \frac{2}{3}\ , \lambda - \frac{1}{3},\ \lambda)\ \mid\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Proposição

Dado um sistema de equações lineares $AX = B$, obtém-se um sistema de equações lineares equivalente ao dado quando se aplicam transformações elementares nas linhas da matriz ampliada , ou seja, quando:

- se trocam duas linhas;
- se multiplica uma linha por um escalar não nulo;
- se substitui uma linha pela sua soma com outra linha multiplicada por um escalar qualquer.

Definição

A utilização sucessiva de transformações elementares nas linhas de um sistema de equações lineares, de modo a transformar a matriz ampliada do sistema numa matriz em escada, designa-se por método de eliminação (ou de condensação) de Gauss.

Definição

Diz-se que uma matriz está em forma de escada reduzida (por linhas) quando se verifica simultaneamente:

1. a matriz está em forma de escada;
2. o elemento pivô de cada linha é igual a 1 e é o único elemento não nulo da sua coluna.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & * & 0 & * & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Definição

A utilização sucessiva de transformações elementares nas linhas de um sistema de equações lineares, de modo a transformar a matriz ampliada do sistema numa matriz em escada reduzida designa-se por método de eliminação (ou de condensação) de Gauss-Jordan.

Proposição

Dado um sistema de equações lineares, por aplicação do método de eliminação de Gauss é sempre possível obter um sistema equivalente cuja matriz ampliada esteja na forma de escada.

Proposição

Dado um sistema de equações lineares, por aplicação do método de eliminação de Gauss-Jordan é sempre possível obter um sistema equivalente cuja matriz ampliada esteja na forma de escada reduzida. Em cada caso, a matriz final é única.

Um sistema de equações lineares pode ser resolvido por:

- método de eliminação gaussiana seguido de substituições sucessivas;
- método de eliminação de Gauss-Jordan.

Definição

Sejam A uma matriz e A' a matriz em forma de escada resultante da aplicação do método de condensação de Gauss (ou de Gauss-Jordan) à matriz A. Define-se a característica da matriz A como sendo o número de elementos pivô de A' que se representa por $\mathrm{r}(A)$.

Proposição

Seja $AX = B$ um sistema de equações lineares. O sistema é:

- possível se $\mathrm{r}([A|B]) = \mathrm{r}(A)$;
- possível e determinado se é possível e o número de incógnitas for igual a $\mathrm{r}(A)$;
- possível e indeterminado se é possível e o número de incógnitas for superior a $\mathrm{r}(A)$.

Definição

Uma matriz E quadrada, de ordem n, que resulta da matriz I_n por se efetuar uma transformação elementar diz-se uma matriz elementar.

$$I_4 \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_4]{} E_1 \quad \text{, então } E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I_4 \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1]{} E_2 \quad \text{, então } E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Será E_1 invertível? $E_1^2 = I_4$.

E E_2?

Proposição

Sejam A uma matriz de tipo $n \times m$ e E uma matriz elementar de ordem n. Então, a matriz A' que resulta da matriz A por se ter efetuado a transformação elementar nas linhas que permitiu obter E verifica:

$$A' = E \cdot A$$

Recordando o Exemplo 3,

$$\underset{(L_1 \leftrightarrow L_2)}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{(L_3 \leftarrow -3L_1 + L_3)}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

...

Desta proposição resulta que a condensação de uma matriz pelo método de Gauss ou de Gauss-Jordan não é mais do que a multiplicação à esquerda dessa matriz por uma sucessão de matrizes elementares:

$$E_q \cdots E_1 \cdot A.$$

Suponhamos que A é uma matriz quadrada de ordem n e a condensação de Gauss-Jordan conduz à matriz identidade, I_n. Como a condensação resulta da multiplicação à esquerda de A por uma sequência de matrizes elementares, $E_1, \ldots, E_q$, então

$$E_q \cdots E_1 \cdot A = I_n.$$

Em tal caso, A é invertível e a inversa é $A^{-1} = E_q \cdots E_1$.

Como calcular o produto $E_q \cdots E_1$?

Note-se que $E_q \cdots E_1 \cdot I_n = E_q \cdots E_1$, pelo que efetuando a condensação de Gauss-Jordan na matriz ampliada $[A \mid I_n]$ tem-se:

$$\left[\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ A & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{Gauss-Jordan}]{} [\, E_q \cdots E_1 A \mid E_q \cdots E_1 I_n \,] .$$

e $E_q \cdots E_1 A$ é uma matriz em forma de escada reduzida. Se $E_q \cdots E_1 A = I_n$ então A é invertível e a inversa é a matriz $n \times n$

$$A^{-1} = E_q \cdots E_1 \cdot I_n.$$

Reciprocamente, será que se obtém sempre a matriz identidade aplicando a eliminação de Gauss-Jordan a A se A é invertível?

Proposição

O sistema $AX = B$ de n equações lineares em n incógnitas é possível e determinado se e só se A é invertível.

Se A é invertível , então $X = A^{-1}B$ é a única solução do sistema.

Reciprocamente, suponhamos por hipótese que o sistema é possível e determinado. Aplicando o método de condensação de Gauss-Jordan a $[A \mid B]$ deveria verificar-se um dos dois seguintes casos:

1. $[\,A\ |B] \xrightarrow[\text{Gauss-Jordan}]{} \left[\begin{array}{c|c} & \alpha_1 \\ I_n & \vdots \\ & \alpha_n \end{array}\right]$ e, consequentemente, A é invertível;

2. $[\,A\ |B] \xrightarrow[\text{Gauss-Jordan}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & * & \dots & * & \alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & * & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha_n \end{array}\right]$ e o sistema $AX = B$ ou é impossível ou é possível e indeterminado, o que é falso por hipótese. Logo este segundo caso não pode ocorrer.

Assim, se o sistema é possível e determinado, verifica-se sempre o caso 1 e A é invertível.

Cálculo da inversa

De modo equivalente ao processo anterior, podemos pensar que, se A é uma matriz quadrada de ordem n, então verificar se A é invertível e, em caso afirmativo, calcular a inversa resume-se a classificar e resolver a equação $AX = I_n$, onde a incógnita X é uma matriz $n \times n$.

$$A \begin{bmatrix} x_{1\,1} & x_{1\,2} & \cdots & x_{1\,n} \\ x_{2\,1} & x_{2\,2} & \cdots & x_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n\,1} & x_{n\,2} & \cdots & x_{n\,n} \end{bmatrix} = I_n \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A \begin{bmatrix} x_{1\,1} \\ x_{2\,1} \\ \vdots \\ x_{n\,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ A \begin{bmatrix} x_{1\,2} \\ x_{2\,2} \\ x_{3\,2} \\ \vdots \\ x_{n\,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ \qquad \vdots \\ A \begin{bmatrix} x_{1\,n} \\ \vdots \\ x_{n-1\,n} \\ x_{n\,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Os n sistemas anteriores têm todos a mesma matriz simples, pelo que se podem resolver simultaneamente considerando as diversas colunas de termos independentes:

$$\left[\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ A & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{Gauss-Jordan}]{} \left[\, E_q \cdots E_1 A \mid E_q \cdots E_1 I_n \,\right]$$

sendo $E_q \cdots E_1 A$ uma matriz em forma de escada reduzida.

Assim, se A é invertível, então cada um dos n sistemas é possível e determinado, pelo que $E_q \cdots E_1 A = I_n$. Então, $E_q \cdots E_1 I_n = A^{-1}$.

Exemplo 4

- $A = I_n$

$$\left[\begin{array}{c|c} I_n & I_n \end{array}\right] \xrightarrow[\text{Gauss-Jordan}]{} \left[\begin{array}{c|c} I_n & I_n \end{array}\right],$$

e

$$I_n^{-1} = I_n.$$

Exemplo 5

- $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & \\ 2 & -3 & 1 & I_3 \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}\right] \xrightarrow[\text{Gauss-Jordan}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \end{array}\right]$$

e A não é invertível.

- Genericamente, uma matriz que tem uma linha ou uma coluna toda nula não é invertível.

Exemplo 6

- $$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & \\ 0 & -3 & 0 & I_3 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \end{array}\right] \xrightarrow[\text{Gauss-Jordan}]{} \left[\begin{array}{c|ccc} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ I_3 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{array}\right],$$

e $$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

- No caso geral, sendo $A = diag(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ invertível, então $\alpha_i \neq 0$, para todo o índice i, e

$$A^{-1} = diag(\frac{1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_n}).$$

Exemplo 7

- $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  e, pelo que concluimos anteriormente, A não é invertível.

- Genericamente, uma matriz que tem duas linhas iguais não é invertível.

Qual seria a resposta se a matriz A tivesse duas colunas iguais? Porquê?