A função determinante associa a cada matriz de tipo $n \times n$ um número e carateriza-se por três propriedades fundamentais:

• o determinante de uma matriz identidade é igual a 1;

• os determinantes de duas matrizes que dependam entre si apenas por uma troca entre duas linhas (colunas) são simétricos;

• a função é linear em cada linha (coluna).

Será que existe alguma função nestas condições? Em caso afirmativo, será que tal função é única?
A resposta é afirmativa para as duas questões.

Representaremos o determinante de uma matriz A por $|A|$ ou por $det\ A$.

Proposição

Seja $A = [a_{i\,j}]_{n\times n}$, com $n \in \mathbb{N}$.

1. Se A tem uma linha (ou uma coluna) toda formada por zeros, então $det\,A = 0$.
2. Se A tem duas linhas (ou duas colunas) iguais, então $det\,A = 0$.

Proposição

Seja $A = [a_{i\,j}]_{n\times n}$, com $n \in \mathbb{N}$. Se A' resulta de A por se adicionar uma linha (coluna) com outra multiplicada por um escalar, então

$$det\,A = det\,A'.$$

Proposição

Seja $A = [a_{i\,j}]_{n\times n}$, com $n \in \mathbb{N}$, uma matriz triangular superior ou inferior. Então, $det\,A = a_{1\,1} \cdots a_{n\,n}$.

Seja $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, com $n \in \mathbb{N}$.

1. Se multiplicarmos uma linha (ou uma coluna) de A por um escalar α, o determinante da matriz resultante é $\alpha det\, A$.
2. Se trocarmos duas linhas (ou duas colunas) de A, então o determinante da matriz resultante é $-det\, A$.
3. Se a uma linha (coluna) de A somarmos outra linha (outra coluna, respetivamente) de A eventualmente multiplicada por um escalar, o determinante da matriz resultante é $det\, A$.

Se A' resulta de A por se efetuarem transformações elementares nas linhas e/ou nas colunas, então existe um escalar α não nulo tal que $det\, A = \alpha det\, A'$.

Proposição

Seja $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, com $n \in \mathbb{N}$. Então, $det(A^T) = det\, A$.

Cálculo do determinante pelo método de Gauss

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{então}$$

$$\det A = \det \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} -\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow 2L_1 + L_3 \\ L_4 \leftarrow -L_1 + L_4}}{=} -\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \underset{L_3 \leftarrow -L_2 + L_3}{=} -\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= -\big(1 \times (-1) \times (-2) \times (-5)\big) \qquad = 10$$

Comecemos por considerar $A = [a]$ uma matriz quadrada de ordem 1:

para qualquer $a \in \mathbb{R}$, $det[a] = det[a \cdot 1] = a\, det[1] = a \cdot 1 = a$.
O número a designa-se *determinante* da matriz $[a]$ de ordem 1.

Notar ainda que a matriz $[a]$ é invertível se e só se $a \neq 0$.

De seguida considere-se $A = [a_{i\,j}]_{2\times 2}$. Efetuando uma análise baseada nos mesmos princípios utilizados no caso de matrizes de ordem 1 obter-se-ia que

$$det\, A = a_{1\,1}a_{2\,2} - a_{1\,2}a_{2\,1}.$$

Em que condições a matriz A é invertível?

Efetuando a condensação de Guass de A conclui-se que a condição é

$$a_{1\,1}a_{2\,2} - a_{1\,2}a_{2\,1} \neq 0$$

No caso de uma matriz de tipo 3×3, $A = [a_{i\,j}]_{3\times 3}$, fazendo raciocínio semelhante chega-se à expressão

$$\det A = (a_{1\,1}a_{2\,2}a_{3\,3} + a_{1\,2}a_{2\,3}a_{3\,1} + a_{1\,3}a_{2\,1}a_{3\,2} - a_{1\,2}a_{2\,1}a_{3\,3} - a_{1\,3}a_{2\,2}a_{3\,1} - a_{1\,1}a_{2\,3}a_{3\,2})$$

e A é invertível se e só se

$$(a_{1\,1}a_{2\,2}a_{3\,3} + a_{1\,2}a_{2\,3}a_{3\,1} + a_{1\,3}a_{2\,1}a_{3\,2} - a_{1\,2}a_{2\,1}a_{3\,3} - a_{1\,3}a_{2\,2}a_{3\,1} - a_{1\,1}a_{2\,3}a_{3\,2}) \neq 0.$$

No caso de matrizes quadradas de ordem $n = 1, 2, 3$, as expressões obtidas para o determinate são: um somatório, com um número de parcelas igual ao número de permutações de $\{1, \ldots, n\}$, cada parcela é o produto de n elementos da matriz sendo, simultaneamente, um de cada linha e um de cada coluna. Cada parcela está afetada do sinal $+$ ou $-$.

Definição - Fórmula de Leibniz

Dada uma matriz $A = [a_{i\,j}]_{n\times n}$, com $n \in \mathbb{N}$, chama-se determinante de A ao número resultante da soma de $n!$ parcelas, uma para cada permutação de $\{1, \dots, n\}$, e em que cada parcela é

- o produto de n elementos da matriz, um de cada linha e, simultaneamente, um de cada coluna,
- afetada pelo sinal $+$ ou $-$, conforme a permutação correspondente é par ou ímpar,

ou seja,

$$det\, A = \sum_{\sigma} sgn(\sigma) a_{1\,\sigma(1)} a_{2\,\sigma(2)} \cdots a_{n\,\sigma(n)}$$

onde σ representa uma permutação de $\{1, \dots, n\}$, e $sgn(\sigma) = 1$ ou $sgn(\sigma) = -1$, conforme σ é uma permutação par ou ímpar, respetivamente.

Definição

Sejam $A = [a_{i\,j}]_{n\times n}$, com $n \geq 2$, e $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Por $A(i|j)$ representa-se a matriz que resulta de A por se eliminar a linha i e a coluna j.

O valor $(-1)^{i+j} det\,(A(i|j))$ designa-se complemento algébrico de $a_{i\,j}$, que se representa por $\Delta_{i\,j}$.

Proposição (Teorema de Laplace)

Seja $A = [a_{i\,j}]_{n\times n}$, com $n \geq 2$, e $i \in \{1, \ldots, n\}$. Então:

1. $det\,A = \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j}\Delta_{i\,j}$;
2. $det\,A = \sum_{j=1}^{n} a_{j\,i}\Delta_{j\,i}$.

Teorema de Laplace

$$\begin{aligned}
det\,A &= det\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\
&= (-2)(-1)^{1+1} det\begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} + (-1)(-1)^{1+2} det\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\
&\quad +0(-1)^{1+3} det\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} + 3(-1)^{1+4} det\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= -2\,det\begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} + det\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} - 3\,det\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Teorema de Laplace

$$= -2\Big(-\det\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix} + 0\det\begin{bmatrix}4 & 2\\ 1 & -2\end{bmatrix} + 0\det\begin{bmatrix}4 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}\Big)+$$

$$+\det\begin{bmatrix}0 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix} - 3\det\begin{bmatrix}0 & -1 & 4\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$= -2\Big(-\det\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix} + 0\det\begin{bmatrix}4 & 2\\ 1 & -2\end{bmatrix} + 0\det\begin{bmatrix}4 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}\Big)+$$

$$+\Big(0\det\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix} - 4\det\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix} + 2\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\Big)$$

$$-3\Big(\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} + 0\det\begin{bmatrix}0 & 4\\ 1 & 1\end{bmatrix} + 0\det\begin{bmatrix}0 & 4\\ 1 & 1\end{bmatrix}\Big)$$

$$= -2\Big(-(-2-3)+0+0\Big) + \Big(0-4(-2-3)+2(1-1)\Big)+$$
$$-3\Big((1-1)+0+0\Big) \qquad = \mathbf{10}$$

Proposição

Sejam A e B matrizes quadradas. Então

$$det\,(AB) = det\,A \cdot det\,B.$$

Proposição

Seja A uma matriz quadrada de ordem $n \in \mathbb{N}$. Então A é invertível se e só se $det\,A \neq 0$.

Corolário

Seja A uma matriz invertível. Então $det(A^{-1}) = \frac{1}{det\,A}$.

De seguida vai ser apresentado um método alternativo para calcular a inversa de uma matriz baseado no cálculo dos complementos algébricos.

Definição

Seja $A = [a_{ij}]_{n\times n}$. A matriz quadrada de ordem n cujo elemento na posição (i, j) é Δ_{ji}, o complemento algébrico de a_{ji}, diz-se a matriz adjunta de A e representa-se por $\mathrm{Adj}(A)$, ou seja,

$$\mathrm{Adj}(A) = [\Delta_{ij}]^T_{n\times n}.$$

Proposição

Se A é uma matriz quadrada de ordem n, então

$$A \cdot \mathrm{Adj}(A) = \mathrm{Adj}(A) \cdot A = |A|\, I_n.$$

Corolário

Se A é uma matriz quadrada invertível, então $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{Adj}(A)$.

Definição

O sistema de equações lineares $AX = B$ de n equações em n incógnitas diz-se um sistema de Cramer se a matriz A é uma matriz invertível.

Proposição - Regra de Cramer

Seja $AX = B$ um sistema de Cramer. Então, a solução do sistema é:

$$\left(\frac{|A_1|}{|A|}, \ldots, \frac{|A_n|}{|A|}\right)$$

onde, para $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{1\,1} & \ldots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \ldots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & \ldots & a_{2\,j-1} & b_2 & a_{2\,j+1} & \ldots & a_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n\,1} & \ldots & a_{n\,j-1} & b_n & a_{n\,j+1} & \ldots & a_{n\,n} \end{bmatrix}.$$