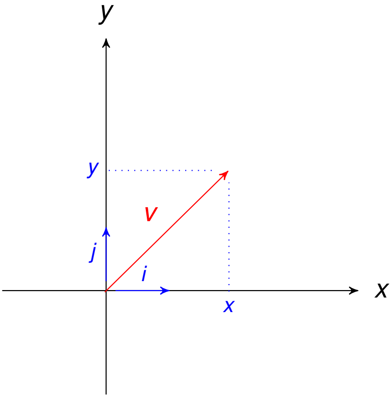
O tipo mais simples de grandeza física pode ser caraterizada por um número e uma unidade de medida. Uma tal quantidade é designada por escalar.

Exemplos: temperatura, massa, resistência de um condutor elétrico, número de bactérias por cm^3, preço.

No entanto grandezas como, por exemplo, deslocamento, velocidade e força necessitam da indicação de um número que representa a sua magnitude e da indicação de uma direção e um sentido, que podem ser representados por sequências de números mediante a introdução de um referencial. Tais quantidades são designadas por vetores.

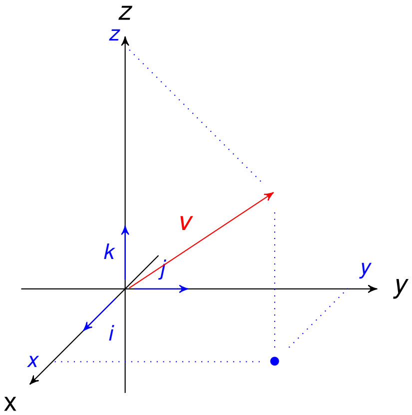
Reperesentação de vetores no plano



$$v = x\,i + y\,j = (x, y).$$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Representação de vetores no espaço



$$v = x\,i + y\,j + z\,k = (x, y, z)$$

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Operações fundamentais com vetores

1. a adição de vetores:

$$u,\ v \text{ vetores } \longmapsto u + v \text{ vetor },$$

2. a multiplicação por um escalar:

$$\alpha \in \mathbb{R},\ u \text{ vetor } \longmapsto \alpha\, u \text{ vetor}$$

As operações vetoriais podem ser definidas usando a representação analítica dos vetores. Por exemplo em $\mathbb{R}^3$,

$u = x_1 i + y_1 j + z_1 k$	$u = (x_1,\ y_1,\ z_1)$
$v = x_2 i + y_2 j + z_2 k$	$v = (x_2,\ y_2,\ z_2)$
$u + v = (x_1 + x_2)i + (y_1 + y_2)j + (z_1 + z_2)k$	$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$
$\alpha u = (\alpha x_1)i + (\alpha y_1)j + (\alpha z_1)k$	$\alpha u = (\alpha x_1,\ \alpha y_1,\ \alpha z_1)$

Definição

Para qualquer $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

No conjunto $\mathbb{R}^n$ as operações de adição e de multiplicação por um escalar definem-se da seguinte forma: para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$, $u = (x_1, \ldots, x_n)$ e $v = (y_1, \ldots, y_n)$ elementos de $\mathbb{R}^n$,

$$u + v = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

$$\alpha u = \alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$$

Os elementos de $\mathbb{R}^n$ designam-se vetores e os números reais designam-se escalares. Num vetor $u = (x_1, \ldots, x_n)$ o número x_i diz-se a i-ésima coordenada de u.

Definição

Sejam u e v vetores. Um vetor w é combinação linear de u e v se existirem escalares α e β tais que

$$w = \alpha u + \beta v.$$

Podemos generalizar a definição anterior para um número qualquer k de vetores. Se $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ são escalares e $v_1, \ldots, v_k$ são vetores, então o vetor

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$$

diz-se uma combinação linear de $v_1, \ldots, v_k$.

Se $\mathcal{V}$ é um conjunto onde estão definidas as aplicações:

1. a adição em $\mathcal{V}$, $+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, tal que
   1. para quaisquer $u, v \in \mathcal{V}$, $\; u + v = v + u$,
   2. para quaisquer $u, v, w \in \mathcal{V}$, $\; (u + v) + w = u + (v + w)$,
   3. existe $0_{\mathcal{V}} \in \mathcal{V}$ tal que, para qualquer $u \in \mathcal{V}$, $\; u + 0_{\mathcal{V}} = u$, o qual se designa vetor nulo,
   4. para qualquer $u \in \mathcal{V}$, existe $-u \in \mathcal{V}$ tal que $\; u + (-u) = 0_{\mathcal{V}}$, o qual se designa simétrico de u;
2. a multiplicação por um escalar, $\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, tal que
   1. para quaisquer $u, v \in \mathcal{V}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\; \lambda \cdot (u + v) = (\lambda \cdot u) + (\lambda \cdot v)$,
   2. para quaisquer $u \in \mathcal{V}$, $\; \lambda, \gamma \in \mathbb{R}$, $\; (\lambda + \gamma) \cdot u = (\lambda \cdot u) + (\gamma \cdot u)$,
   3. para quaisquer $u \in \mathcal{V}$, $\; \lambda, \gamma \in \mathbb{R}$, $\; (\lambda\gamma) \cdot u = \lambda \cdot (\gamma \cdot u)$,
   4. para qualquer $u \in \mathcal{V}$, $\; 1 \cdot u = u$;

então diz-se que a estrutura $(\mathcal{V}, +, \mathbb{R}, \cdot)$ é um espaço vetorial ou, abreviadamente, que $\mathcal{V}$ é um espaço vetorial real.

Proposição

Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial. Então,

- para qualquer escalar λ, $\lambda \cdot 0_{\mathcal{V}} = 0_{\mathcal{V}}$;
- para qualquer $v \in \mathcal{V}$, $0 \cdot v = 0_{\mathcal{V}}$;
- dados um escalar λ e $v \in \mathcal{V}$, se $\lambda \cdot v = 0_{\mathcal{V}}$, então $\lambda = 0$ ou $v = 0_{\mathcal{V}}$;
- para quaisquer escalar λ e $v \in \mathcal{V}$,

$$(-\lambda) \cdot v = \lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v).$$

EXEMPLO 1

O conjunto $S = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a + b = 0\}$ com as operações

$$\begin{array}{rccc} + \ : & S \times S & \longrightarrow & S \\ & ((x_1, x_2),\ (y_1, y_2)) & \longmapsto & (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} \cdot \ : & \mathbb{R} \times S & \longrightarrow & S \\ & (\lambda,\ (x_1, x_2)) & \longmapsto & (\lambda x_1,\ \lambda x_2) \end{array} .$$

é um espaço vetorial, em que a soma de dois vetores e a multiplicação de um vetor por um escalar são as restrições a S das respetivas operações em $\mathbb{R}^2$. Em particular, o vetor nulo em $\mathbb{R}^2$, $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)$, pertence a S e o simétrico de um vetor $(a, b) \in S$ é o vetor $(-a, -b)$ que também pertence a S.

Dado um espaço vetorial $\mathcal{V}$, que propriedades deve satisfazer um seu subconjunto S para que sejam preservadas as propriedades de espaço vetorial?

Definição

Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial e $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$. Diz-se que $\mathcal{S}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{V}$, e escreve-se $\mathcal{S} \leq \mathcal{V}$, se:

1. $\mathcal{S} \neq \emptyset$;
2. se $u, v \in \mathcal{S}$, então $u + v \in \mathcal{S}$ (i.e., $\mathcal{S}$ é fechado para a adição);
3. se $v \in \mathcal{S}$ e λ é um escalar, então $\lambda \cdot v \in \mathcal{S}$ (i.e., $\mathcal{S}$ é fechado para a multiplicação por um escalar).

Um subespaço vetorial $\mathcal{S}$ é um espaço vetorial em que o conjunto dos vetores está contido no conjunto dos vetores de outro espaço vetorial $\mathcal{V}$ e em que as operações são a restrição a $\mathcal{S}$ das operações de $\mathcal{V}$.

EXEMPLOS 2

Os seguintes conjuntos são subespaços de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{S}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 0\}$$

$$\mathcal{S}_2 = \{(x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Será $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ um subespaço? E $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$?

EXEMPLOS 3

Os seguintes conjuntos são subespaços de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{U}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y + z = 0\},$$

$$\mathcal{U}_2 = \{(x, x - y, y + x) \mid x, y \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathcal{U}_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0,\ y + z = 0\}.$$

Será $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ um subespaço? E $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_3$? E $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$? E $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_3$?

EXEMPLOS 4

Propõem-se agora uma reflexão sobre as regiões de $\mathbb{R}^2$ que, com a adição e multiplicação por escalar definida atrás, são espaços vetoriais.
Quais dos subconjuntos abaixo são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$?

- $\mathbb{R}^2$?
- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x\}$?
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x + 1\}$?
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{1}{2}x\}$?
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}$?
- Que subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ são espaços vetoriais?

EXEMPLOS 5

De modo análogo ao exemplo anterior, façamos uma reflexão sobre as regiões de $\mathbb{R}^3$ que são espaços vetoriais.
Quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$, com a adição e multiplicação por escalar definida atrás, serão subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$:

- $\mathbb{R}^3$
- $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$?
- $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x\}$?
- $\{(x,y,z \in \mathbb{R}^3 \mid y = x+2\}$?
- $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0,\ 2x+y+z=0\}$?
- $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+y=0,\ x-y+z=0\}$?
- $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+y=0,\ x-y+z=1\}$?

- Que subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ são espaços vetoriais?

Proposição

Dado um espaço vetorial $\mathcal{V}$ qualquer, são subespaços vetoriais de $\mathcal{V}$ o próprio $\mathcal{V}$ e $\{0_\mathcal{V}\}$.

Mais ainda, qualquer subespaço S de $\mathcal{V}$ é tal que $\{0_\mathcal{V}\} \leq S \leq \mathcal{V}$.

Proposição

Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial e $S_1, S_2 \leq \mathcal{V}$. Então, $S_1 \cap S_2 \leq \mathcal{V}$.

Proposição

Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial e $S_1, S_2 \leq \mathcal{V}$. Então, $S_1 \cup S_2 \leq \mathcal{V}$ se e só se $S_1 \subseteq S_2$ ou $S_2 \subseteq S_1$.

EXEMPLO 6

Considere o seguinte sistema homogéneo de equações lineares em 4 incógnitas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$C_S = \{(-2\alpha, \alpha, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Notar que:

- $(0, 0, 0, 0)$ é solução do sistema;
- sendo $(-2a, a, a, 0), (-2b, b, b, 0) \in C_S$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então
  - $(-2a, a, a, 0) + (-2b, b, b, 0) = \big(-2(a+b), a+b, a+b, 0\big) \in C_S$;
  - $\lambda(-2a, a, a, 0) = \big(-2\lambda a, \lambda a, \lambda a, 0\big) \in C_S$.

Logo $C_S \leq \mathbb{R}^4$.

Será que o exemplo anterior é um caso particular, ou será que as soluções de um qualquer sistema homogéneo $AX = 0$ de m equações em n incógnitas constituem um subespaço de $\mathbb{R}^n$?

Proposição

O conjunto das soluções de um sistema homogéneo de m equações em n incógnitas é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

Mais, veremos que todo o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ é o conjunto das soluções de um sistema homogéneo de equações lineares em n incógnitas.

E relativamente ao conjunto das soluções de um sistema não homogéneo, será que é um subespaço vetorial?

O conjunto das soluções de um sistema de equações lineares não homogéneo não é um subespaço vetorial.

Proposição

Num espaço vetorial $\mathcal{V}$, dado $C \subseteq \mathcal{V}$, o conjunto de todas as combinações lineares de vetores de C,

$$\left\{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ v_1, \ldots, v_n \in C,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\right\}$$

é um subespaço vetorial de $\mathcal{V}$ e é o menor subespaço que contém C.

O subespaço das combinações lineares de vetores de C representa-se por $\langle C \rangle$.

Definição

Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial e $C \subseteq \mathcal{V}$.

Se $\mathcal{V} = \langle C \rangle$, então diz-se que C gera $\mathcal{V}$ ou que C é um conjunto gerador de $\mathcal{V}$.

O espaço vetorial $\langle C \rangle$ diz-se o espaço gerado por C.

EXEMPLO 7

$C_1 = \{(1,2,0,-1),\ (-1,0,0,2),\ (0,1,1,1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$

Os vetores de $\mathbb{R}^4$ que pertencem a $\langle C_1 \rangle$ são os vetores (x, y, z, w) tais que o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

é possível.
O sistema só é possível se $2x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + w = 0$. Logo,

$$\langle C_1 \rangle = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + w = 0\},$$

ou seja, $\langle C_1 \rangle$ é conjunto das soluções do sistema homogéneo formado pela equação

$$\left\{ 2x - \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}z + w = 0. \right.$$

EXEMPLO 8

$C_2 = \{(1, -1, 2), (-1, 0, 1), (0, 0, 2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Será $\mathbb{R}^3 = \langle C_2 \rangle$? Isto é, será que existem $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tais que, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$(a, b, c) = \alpha_1(1, -1, 2) + \alpha_2(-1, 0, 1) + \alpha_3(0, 0, 2) \text{ ?}$$

O sistema $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ é possível e determinado.

Logo, $\mathbb{R}^3 = \langle C_2 \rangle$. Resolvendo o sistema conclui-se que a solução do sistema é

$$\left(-b,\ -a-b,\ \frac{a+3b+c}{2} \right)$$

pelo que

$$(a, b, c) = -b \cdot (1, -1, 2) + (-a-b) \cdot (-1, 0, 1) + \frac{a+3b+c}{2} \cdot (0, 0, 2).$$

EXEMPLO 9

Como calcular um conjunto gerador de um espaço vetorial?

$$
\begin{aligned}
S &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \ : \ c = a + b\} \\
&= \{(a, b, a + b) \ : \ a, b \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(a, 0, a) + (0, b, b) \ : \ a, b \in \mathbb{R}\} \\
&= \{a \cdot (1, 0, 1) + b \cdot (0, 1, 1) \ : \ a, b \in \mathbb{R}\} \\
&= \langle (1, 0, 1), (0, 1, 1) \rangle,
\end{aligned}
$$

ou seja, $S = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 1) \rangle$.

Pode também verificar-se que

$$S = \langle (2, 1, 3), (0 - 1 - 1) \rangle,$$

o que permite concluir que um subespaço vetorial admite vários conjuntos geradores.

Proposição

Sejam $\mathcal{V}$, $n \in \mathbb{N}$ e $u, v_1, \ldots, v_n \in \mathcal{V}$.

1. Qualquer subconjunto de $\{v_1, \ldots, v_n\}$ gera um subespaço de $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.
2. $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \langle u, v_1, \ldots, v_n \rangle$ se e só se u é combinação linear de $v_1, \ldots, v_n$.

Proposição

Sejam $\mathcal{V}$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq i, j \leq n$, $v_1, \ldots, v_n \in \mathcal{V}$ e $\lambda \neq 0$ um escalar. Então,

1. $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, \lambda \cdot v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle$;
2. $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i + v_j, v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle$.

Se um vetor v_1 se escreve como combinação linear dos vetores de um conjunto $C = \{v_2, \ldots, v_n\}$ diremos que v_1 é linearmente dependente dos vetores de C. Notar que se $v_1 = \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$, então

$$v_1 - \alpha_2 v_2 - \cdots - \alpha_n v_n = 0_{\mathcal{V}}.$$

Definição

Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial, $n \in \mathbb{N}$ e $v_1, \ldots, v_n \in \mathcal{V}$. Diz-se que $v_1, \ldots, v_n$ são n vetores linearmente independentes se sendo $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ escalares tais que

$$0_{\mathcal{V}} = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n,$$

então $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Se $v_1, \ldots, v_n$ não são vetores linearmente independentes, então dizem-se linearmente dependentes.

EXEMPLOS 10

- $C_1 = \{(1,3,0,-1),(2,3,-4,1),(4,3,-12,5)\} \subseteq \mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned}(0,0,0,0) &= 2(1,3,0,-1) - 3(2,3,-4,1) + (4,3,-12,5)\\ &= -(1,3,0,-1) + \tfrac{3}{2}(2,3,-4,1) - \tfrac{1}{2}(4,3,-12,5).\end{aligned}$$

  Os vetores de C_1 não são linearmente independentes.

- $C_2 = \{(1,2,1,3),(-2,0,1,-2),(0,-2,0,1)\}$

  Serão os vetores de C_2 linearmente independentes?

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O sistema é possível e determinado. Assim, o vetor nulo, escreve-se de modo único como combinação linear dos vetores de C_2, ou seja, os vetores de C_2 são linearmente independentes.

EXEMPLOS 11

Será um vetor genérico de $\mathbb{R}^4$, $v = (a, b, c, d)$, combinação linear dos vetores do conjunto $C_2 = \{(1, 2, 1, 3), (-2, 0, 1, -2), (0, -2, 0, 1)\}$?

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

Já vimos que o sistema homógéneo associado é possível e determinado, pelo que a caraterística da matriz simples é 3 e, consequentemente, o sistema é impossível ou possível e determinado.

Assim, se a coluna dos termos independentes for formada pelas coordenadas de vetores de $\mathbb{R}^4$ que são combinação linear de vetores de C_2, a caraterística da matriz ampliada é 3 e o sistema é possível e determinado. Neste caso, os coeficientes da combinação linear são únicos e verifica-se

$$-2a + \frac{b}{2} - 2c + d = 0.$$

Caso contrário, a caraterística da matriz ampliada é 4 o sitema é impossível.

Proposição

Sejam $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V}$ um espaço vetorial e $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{V}$. Os vetores $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{V}$ são n vetores linearmente independentes se e só se qualquer combinação linear de $v_1, \dots, v_n$ tem coeficientes únicos.

Proposição

Sejam $\mathcal{V}$, $n \in \mathbb{N}$ e $v_1, \dots, v_n, u \in \mathcal{V}$.

1. Se $v_1, \dots, v_n$ são n vetores linearmente dependentes, então $u, v_1, \dots, v_n$ são $n+1$ vetores linearmente dependentes.
2. Se $v_1, \dots, v_n$ são n vetores linearmente independentes, então qualquer subconjunto de $\{v_1, \dots, v_n\}$ é constituído por vetores linearmente independentes.
3. Se $v_1, \dots, v_n$ são n vetores linearmente independentes e $u, v_1, \dots, v_n$ são $n+1$ vetores linearmente dependentes, então u é combinação linear de $v_1, \dots, v_n$.

Proposição

Sejam $\mathcal{V}$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq i, j \leq n$, $v_1, \ldots, v_n \in \mathcal{V}$ e $\lambda \neq 0$ um escalar. Então, as seguintes condições são equivalentes:

1. $v_1, \ldots, v_n$ são n vetores linearmente independentes;
2. $v_1, \ldots, v_{i-1}, \lambda \cdot v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n$ são n vetores linearmente independentes;
3. $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i + v_j, v_{i+1}, \ldots, v_n$ são n vetores linearmente independentes.

Definição

Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial finitamente gerado, $n \in \mathbb{N}$ e $v_1, \ldots, v_n \in \mathcal{V}$. A sequência $(v_1, \ldots, v_n)$ diz-se uma base de $\mathcal{V}$ se:

- $\mathcal{V} = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$;
- $v_1, \ldots, v_n$ são n vetores linearmente independentes.

De acordo com esta definição, será que o subespaço $\{0_{\mathcal{V}}\}$ admite uma base?

Um subespaço vetorial que admite uma base finita diz-se finitamente baseado.

$$\text{Base} \quad \rightleftharpoons \quad \text{Conjunto maximal de vetores linearmente independentes}$$

$$\rightleftharpoons \quad \text{Conjunto gerador minimal de vetores}$$

EXEMPLOS 12

Será $((1,0,-2),(1,1,-1),(-1,-1,3))$ uma base de $\mathbb{R}^3$?

Para isso é necessário que o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

seja possível, para quaisquer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, e o sistema homogéneo associado

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

seja determinado. Equivalentemente, é necessário que o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

seja possível e determinado, para quaisquer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

EXEMPLOS 13

Será $\big((0,\frac{1}{2},1,1),\ (-1,0,1,2)\big)$ uma base do subespaço

$$\mathcal{S} \quad = \{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \mid a-2b+c=0,\ -d+c=a\}?$$

$S=\{(c-d,\ c-\frac{1}{2}d,\ c,\ d)\mid d,c\in\mathbb{R}\}$, pelo que a resposta é afirmativa se o sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c-d \\ c-\frac{1}{2}d \\ c \\ d\end{bmatrix}$$

for possível e determinado, para quaisquer $c,d\in\mathbb{R}$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & c-d \\ \frac{1}{2} & 0 & c-\frac{d}{2} \\ 1 & 1 & c \\ 1 & 2 & d \end{array}\right] \xrightarrow[\text{Gauss-Jordan}]{\text{condensação}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2c-d \\ 0 & 1 & -c+d \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Confirma-se que o sistema é possível e determinado, pelo que qualquer vetor de $\mathcal{S}$ escreve-se de forma única como combinação linear dos vetores $(0,\frac{1}{2},1,1)$ e $(-1,0,1,2)$.

Proposição

Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial finitamente gerado, $n \in \mathbb{N}$ e $v_1, \ldots, v_n \in \mathcal{V}$. As seguintes condições são equivalentes:

- $(v_1, \ldots, v_n)$ é uma base de $\mathcal{V}$;
- qualquer vetor de $\mathcal{V}$ escreve-se de forma única como combinação linear de $v_1, \ldots, v_n$.

Se $(v_1, \ldots, v_n)$ é uma base de $\mathcal{V}$, e $v \in \mathcal{V}$, os coeficientes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ da combinação linear $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ dizem-se as coordenadas de v na base $(v_1, \ldots, v_n)$.

EXEMPLOS 14

Será $\big((-1,1,2),\ (0,-1,-1),\ (0,-1,0),\ (2,2,1)\big)$ uma base de $\mathbb{R}^3$?

Para isso é necessário que o sistema

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

seja possível e determinado, para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Como o número de incógnitas é superior ao número de linhas da matriz simples, o sistema não é possível e determinado.

$\rightharpoonup$ Se o sistema for impossível, então os vetores dados não geram $\mathbb{R}^3$.

$\rightharpoonup$ Se o sistema for posível, então não é determinado, pelo que os vetores não são linearmente independentes.

Questões

- Será que existem 7 vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}^6$?
- Será que existe um conjunto com cardinal 5 que gere $\mathbb{R}^6$?

Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, uma base de $\mathbb{R}^n$ tem exatamente n vetores.

E num subespaço genérico?

Lema

Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial finitamente gerado. Suponhamos que existe um conjunto finito C com m elementos que gera $\mathcal{V}$. Se I é um subconjunto de $\mathcal{V}$ constituído por p vetores linearmente independentes, então $p \leq m$.

Proposição

Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial finitamente baseado. Então, as bases de $\mathcal{V}$ têm todas o mesmo número de elementos.

Definição

Sendo $\mathcal{V}$ um espaço vetorial finitamente baseado, chama-se dimensão de $\mathcal{V}$ ao número de vetores de uma base de $\mathcal{V}$.
Se $\mathcal{V} = \{0_{\mathcal{V}}\}$, então a dimensão de $\mathcal{V}$ é 0

A dimensão de um espaço $\mathcal{V}$ finitamente gerado representa-se por

$$\dim \mathcal{V}$$

Um subespaço de $\mathbb{R}^n$ de dimensão 1 diz-se uma reta. Um subespaço de dimensão 2 diz-se um plano. Um subespaço de dimensão $n-1$ diz-se um hiperplano.

Repare-se que em $\mathbb{R}^m$, com $m \in \mathbb{N}$, um vetor $(x_1, \ldots, x_m)$ pode-se escrever na forma

$$(x_1, \ldots, x_m) = x_1(1, 0, \ldots, 0) + \cdots + x_m(0, \ldots, 0, 1)$$

e os coeficientes x_1, x_2, $\ldots$ x_m são únicos.

A sequência

$$\big((1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)\big)$$

é uma base de $\mathbb{R}^m$, usualmente designada por base canónica, e consequentemente

$$\dim \mathbb{R}^m = m.$$

Os coeficientes x_1, x_2, $\ldots$ x_m são as coordenadas de $(x_1, \ldots, x_m)$ na base canónica.

As colunas de uma matriz de tipo $m \times n$ podem ser encaradas como sendo n vetores do espaço $\mathbb{R}^m$
e as linhas de A como sendo m vetores de $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{bmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \cdots & a_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m\,1} & a_{m\,2} & \cdots & a_{m\,n} \end{bmatrix} = [C_1\, C_2 \cdots C_n] = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix}$$

onde

$$C_1 = \begin{bmatrix} a_{1\,1} \\ a_{2\,1} \\ \vdots \\ a_{m\,1} \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} a_{1\,2} \\ a_{2\,2} \\ \vdots \\ a_{m\,2} \end{bmatrix}, \quad \ldots \quad , C_n = \begin{bmatrix} a_{1\,n} \\ a_{2\,n} \\ \vdots \\ a_{m\,n} \end{bmatrix},$$

e

$$\begin{aligned} L_1 &= \begin{bmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \ldots & a_{1\,n} \end{bmatrix} \\ L_2 &= \begin{bmatrix} a_{2\,1} & a_{2\,2} & \ldots & a_{2\,n} \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ L_n &= \begin{bmatrix} a_{m\,1} & a_{m\,2} & \ldots & a_{m\,n} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

• Transformações elementares nas linhas de uma matriz não alteram o número de colunas nem o número de linhas linearmente independentes.

• Transformações elementares nas colunas de uma matriz não alteram o número de colunas nem o número de linhas linearmente independentes.

O número de linhas linearmente independentes de uma matriz A é igual ao número de colunas linearmente independentes de A e igual ao número de pivôs da matriz em forma de escada que resulta de A por condensação de Gauss.

Definição

Seja A uma matriz. A dimensão do espaço gerado pelas linhas de A diz-se a caraterística de A e representa-se por $\mathrm{r}(A)$.

Seja $AX = B$ um sistema de m equações em n incógnitas. Então,

$$AX = B \quad \Leftrightarrow \quad [C_1 \cdots C_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = B \quad \Leftrightarrow \quad x_1 C_1 + \cdots + x_n C_n = B$$

Proposição

Seja $AX = B$ um sistema de m equações lineares em n incógnitas.

1. $AX = B$ é possível se e só se B é combinação linear das colunas de A, isto é, se e só se
$$r(A) = r([A|B]).$$
2. $AX = 0$ é determinado se e só se as colunas de A são linearmente independentes, isto é, se e só se
$$r(A) = n.$$