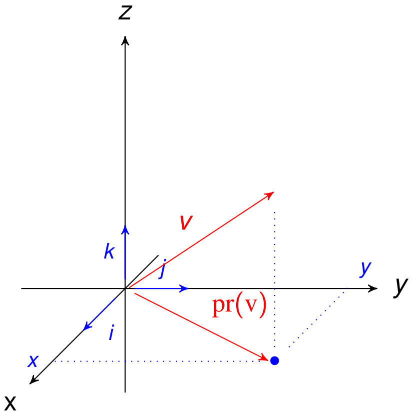
Exemplo 1

Considere-se a função $\begin{array}{rccc} \mathrm{pr}: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x,y,0) \end{array}$.

Trata-se da projeção de um vetor do espaço $\mathbb{R}^3$ no plano $z = 0$.



Qual é a projeção de $(1, 3, -1)$? E de $(0, 1, 5)$?

E de $(1, 3, -1) + (0, 1, 5)$? E de $3\,(1, 3, -1)$?

Calcule a projeção dos vetores $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

Qual é o resultado de $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$?

Definição

Diz-se que uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear se se verificam as seguintes propriedades:

1. para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^n$, $f(u + v) = f(u) + f(v)$;
2. para quaisquer $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}^n$, $f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$.

Estas duas condições significam que f preserva a adição de vetores e a multiplicação por um escalar, respetivamente.

São designações equivalentes a transformação linear as expressões aplicação linear e homomorfismo entre espaços vetoriais.

Exemplo 2

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{pr} : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \mapsto & (x, y, 0) \end{array}$$

Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $(x_1, y_1, z_1),\ (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$, então

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) &= \mathrm{pr}\big(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2\big) \\ &= \big((x_1 + x_2),\ (y_1 + y_2),\ 0\big) \\ &= \big(x_1,\ y_1,\ 0\big) + \big(x_2,\ y_2,\ 0\big) \\ &= \mathrm{pr}(x_1, y_1, z_1) + \mathrm{pr}(x_2, y_2, z_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}(\lambda(x_1, y_1, z_1)) &= \mathrm{pr}\big(\lambda x_1,\ \lambda y_1,\ \lambda z_1\big) \\ &= \big(\lambda x_1,\ \lambda y_1,\ 0\big) \\ &= \lambda(x_1,\ y_1,\ 0) \\ &= \lambda\ \mathrm{pr}(x_1, y_1, z_1). \end{aligned}$$

Logo, pr é uma transformação linear.

Exemplo 3

Seja $\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + y, -y + 3z) \end{array}$.

Será ψ uma aplicação linear?

$$\begin{aligned} \psi\big((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)\big) &= \\ &\vdots \\ &= \psi(x_1, y_1, z_1) + \psi(x_2, y_2, z_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi\big(\lambda(x_1, y_1, z_1)\big) &= \\ &\vdots \\ &= \lambda\, \psi(x_1, y_1, z_1). \end{aligned}$$

Logo, ψ é uma transformação linear.

Exemplo 4

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. Considere-se a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \psi_A : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & (x', y') \end{array}$$

em que

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Assim, verifica-se que

$$\psi_A(x, y, z) = (2x + y, -y + 3z),$$

o que significa que $\psi_A = \psi$, onde ψ é a aplicação linear definida no exemplo anterior.

Genericamente, sendo $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, define-se

$$\begin{gathered} f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ f_A(x_1, \ldots, x_n) = (x'_1, \ldots, x'_m) \end{gathered}$$

em que

$$A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{bmatrix}.$$

f_A é uma aplicação linear porque, para $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$,

verifica-se que

$$A(X+Y) = AX + AY \qquad \text{e} \qquad A(\lambda X) = \lambda(AX).$$

Exemplos 5

Considerem-se as seguintes funções:

1. a translação definida pelo vetor $(1, 2, -1)$

$$\begin{array}{rccl} t: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \mapsto & (1, 2, -1) + (x, y, z) \end{array};$$

2. $$\begin{array}{rccl} d: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \mapsto & (x, |y|) \end{array}.$$

São aplicações lineares?

Proposição

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear. Então:

1. $f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^m}$;
2. para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, $f(-v) = -f(v)$;
3. para quaisquer $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ escalares,

$$f(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) = \alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_k f(v_k).$$

Exemplo 6

Considere no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ a base

$$\mathcal{B} = ((1,0,2),(1,0,1),(-1,1,0))$$

e admita- se que $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ é uma transformação linear tal que:

$$\begin{aligned} \phi(1,0,2) &= (1,2,0,1), \\ \phi(1,0,1) &= (0,1,1,1), \\ \phi(-1,1,0) &= (1,0,0,1). \end{aligned}$$

Como calcular $\phi(1,2,1)$?

$$\begin{aligned} (1,2,1) &= -2(1,0,2) + 5(1,0,1) + 2(-1,1,0), \\ \phi(1,2,1) &= \phi\big(-2(1,0,2) + 5(1,0,1) + 2(-1,1,0)\big) \\ &= -2\phi(1,0,2) + 5\phi(1,0,1) + 2\phi(-1,1,0) \\ &= -2(1,2,0,1) + 5(0,1,1,1) + 2(1,0,0,1) = (0,1,5,5). \end{aligned}$$

Exemplo 6 - continuação

Será possível conhecer a imagem de um qualquer vetor de $\mathbb{R}^3$?

Generalizando o procedimento anterior:

$$(a, b, c) \quad = (-a - b + c)(1, 0, 2) \; + (2a + 2b - c)(1, 0, 1) \; + b(-1, 1, 0),$$

$$\begin{aligned}
\phi(a, b, c) &= \phi\big((-a - b + c)(1, 0, 2) \; + (2a + 2b - c)(1, 0, 1) \; + b(-1, 1, 0)\big) \\
&= (-a - b + c)\phi(1, 0, 2) \; + (2a + 2b - c)\phi(1, 0, 1) \; + b\phi(-1, 1, 0) \\
&= (-a - b + c)(1, 2, 0, 1) \; + \; (2a + 2b - c)(0, 1, 1, 1) \; + \; b(1, 0, 0, 1) \\
&= (-a + c, \; c, 2a + 2b - c, a + 2b).
\end{aligned}$$

Exemplo 6 - continuação

A aplicação

$$\begin{array}{cccc} \phi : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & (a,b,c) & \longmapsto & \big(-a+c, c, 2a+2b-c, a+2b\big) \end{array}$$

é uma transformação linear nas condições do enunciado.

Será que existe outra transformação linear nas condições do enunciado?

Como $\mathcal{B}$ é uma base, as coordenadas de cada $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ são únicas, pelo que o procedimento anterior conduz a um resultado único para $\phi(a,b,c)$ e permite escrever

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a-b+c \\ 2a+2b-c \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a+c \\ c \\ 2a+2b-c \\ a+2b \end{bmatrix}.$$

Exemplo 7

Considere-se agora no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ o conjunto gerador

$$\mathcal{C} = \{(1,1,0), (-1,0,1), (0,1,0), (0,1,1)\}.$$

Seja $\tau : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma função tal que:

$$\begin{aligned} \tau(1,1,0) &= (1,0,1), \\ \tau(-1,0,1) &= (1,1,1), \\ \tau(0,1,0) &= (0,0,1), \\ \tau(0,1,1) &= (-1,-1,0). \end{aligned}$$

Será que existe uma transformação linear nestas condições?

Admitindo que sim, como calcular $\tau(1,0,1)$?

Exemplo 7 - continuação

Para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$(1,0,1) = (2-\alpha)(1,1,0) + (1-\alpha)(-1,0,1) - 2(0,1,0) + \alpha(0,1,1).$$

Então, se $\alpha = 0$,

$$\begin{aligned}
\tau(1,0,1) &= \tau(2(1,1,0) + (-1,0,1) - 2(0,1,0)) \\
&= 2\tau(1,1,0) + \tau(-1,0,1) - 2\tau(0,1,0) \\
&= 2(1,0,1) + (1,1,1) - 2(0,0,1) \\
&= (3,1,1),
\end{aligned}$$

mas se escolher $\alpha = 1$,

$$\begin{aligned}
\tau(1,0,1) &= \tau((1,1,0) + -2(0,1,0) + (0,1,1)) \\
&= \tau(1,1,0) - 2\tau(0,1,0) + \tau(0,1,1) \\
&= (1,0,1) + -2(0,0,1) + (-1,-1,0) \\
&= (0,-1,-1).
\end{aligned}$$

Exemplo 7 - continuação

Consequentemente, não existe uma transformação linear nestas condições.

Note-se que os vetores do conjunto $\mathcal{C}$ não são linearmente independentes, sendo

$$(1,1,0) = -(-1,0,1) + (0,1,1)$$

e

$$\tau(1,1,0) \neq -\tau(-1,0,1) + \tau(0,1,1).$$

Definição

Sendo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear, chama-se matriz de f, relativamente às bases $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}$ de $\mathbb{R}^m$, à matriz

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}) = \begin{bmatrix} \alpha_{1\,1} & \cdots & \alpha_{1\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m\,1} & \cdots & \alpha_{m\,n} \end{bmatrix},$$

cujas colunas são as coordenadas das imagens dos vetores da base $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ na base $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}$.

Proposição

Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear, $v \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}$ uma base de $\mathbb{R}^m$. Se as coordenadas de v na base $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ são $(x_1, \ldots, x_n)$, então a imagem $f(v)$ tem coordenadas $(y_1, \ldots, y_m)$ na base $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}$ em que

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Proposição

Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear e $\mathcal{S} \leq \mathbb{R}^n$. Então $f(\mathcal{S}) \leq \mathbb{R}^m$.

Definição

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear. O subespaço vetorial $f(\mathbb{R}^n)$ designa-se imagem de f e representa-se por $Im\, f$, *i.e.*,

$$Im\, f = \{f(v) \mid v \in \mathbb{R}^n\}.$$

Proposição

Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear e $\mathcal{S} \leq \mathbb{R}^m$. Então $f^{-1}(\mathcal{S}) \leq \mathbb{R}^n$.

Definição

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear. O subespaço vetorial $f^{-1}\{(0, \ldots, 0)\}$ designa-se núcleo de f e representa-se por $Nuc\, f$, *i.e.*,

$$Nuc\, f = \{v \in \mathbb{R}^n \mid f(v) = (0, \ldots, 0)\}.$$

Exemplo 8

Sejam f e g as seguintes aplicações lineares:

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x_1,x_2) & \mapsto & (x_1, x_1+x_2, x_2) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} g:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x_1,x_2) & \mapsto & (-x_1, x_1-2x_2, -x_2) \end{array}.$$

Sendo B_2 e B_3 as bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respetivamente, então

$$\mathcal{M}(f;B_2,B_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathcal{M}(g;B_2,B_3) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Considere-se a função $\begin{array}{rcl} f+g:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x_1,x_2) & \mapsto & f(x_1,x_2)+g(x_1,x_2) \end{array}$.

$f+g$ é uma transformação linear?

Como podemos calcular $\mathcal{M}(f+g;B_2,B_3)$?

Proposição

Sejam $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ e $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}$ bases de $\mathbb{R}^n$ e de $\mathbb{R}^m$, respetivamente. Sejam f e g aplicações lineares $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Então

$$\begin{array}{rccl} f+g: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & (x_1,\ldots,x_n) & \mapsto & f(x_1,\ldots,x_n)+g(x_1,\ldots,x_n) \end{array}$$

é uma aplicação linear e

$$\mathcal{M}(f+g;\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n},\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}) = \mathcal{M}(f;\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n},\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}) + \mathcal{M}(g;\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n},\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}).$$

Exemplo 8

Sejam f e g as seguintes aplicações lineares:

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & (x_1, x_1 + x_2, x_2, -x_1) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) & \mapsto & (2x_1, x_1 - x_3, x_2 + x_4) \end{array}.$$

Sendo B_2, B_3 e B_4 as bases canónicas de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$, respetivamente, então

$$\mathcal{M}(f; B_2, B_4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathcal{M}(g; B_4, B_3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Será a função $\begin{array}{rcl} g \circ f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & g(f(x_1, x_2)) \end{array}$ uma transformação linear?

Como podemos calcular $\mathcal{M}(g \circ f; B_2, B_3)$?

Proposição

Sejam $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}$ e $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^p}$ bases de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^p$, respetivamente. Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ aplicações lineares. Então

$$\begin{array}{rccc} g \circ f : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^p \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & g(f(x_1, \ldots, x_n)) \end{array}$$

é uma aplicação linear e

$$\mathcal{M}(g \circ f; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^p}) = \mathcal{M}(g; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^p}) \cdot \mathcal{M}(f; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}).$$