Definições

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e A uma matriz quadrada de ordem n. Diz-se que uma matriz coluna X, de tipo $n \times 1$, é vetor próprio (ou vetor caraterístico) de A se:

- $X \neq 0_{n\times 1}$;
- existir um escalar λ tal que $AX = \lambda X$.

O valor λ designa-se valor próprio (ou valor caraterístico) de A e diz-se que o vetor próprio X está associado ao valor próprio λ.

Proposição

Sejam $n \in \mathbb{N}$, A uma matriz quadrada de ordem n e α escalar não nulo. Se λ é um valor próprio de A e u e v são vetores próprios associados a λ, então $u + v$ (se $u \neq -v$) e αv são também vetores próprios de A associados a λ.

Proposição

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e A uma matriz quadrada de ordem n. Então λ é um valor próprio de A se e só se $|A - \lambda I_n| = 0$.

Definição

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e A uma matriz quadrada de ordem n. Então $|A - \lambda I_n|$ é um polinómio de grau n em λ que se designa polinómio caraterístico de A.

Resumo:

Dada uma matriz quadrada A, para determinar os valores e os vetores próprios de A deve-se:

1. calcular o polinómio caraterístico, $|A - \lambda I|$;
2. determinar as raízes do polinómio caraterístico, para obter os valores próprios;
3. para cada valor próprio λ resolver o sistema $(A - \lambda I)X = 0$, para obter os vetores próprios associados a λ.

Exemplo 1

Considere-se a matriz

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left| G - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2$$

As raízes do polinómio $-\lambda^3 + 3\lambda + 2$ são 2 e -1, pois

$$-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = -(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2.$$

Então os valores próprios de A são 2 com multiplicidade algébrica 1 (multiplicidade da raiz 2) e -1 com multiplicidade algébrica 2 (multiplicidade da raiz -1).

Para calcular os vetores próprios é necessário resolver dois sistemas:

- $$(G - 2\,I)\,X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O conjunto das soluções do sistema é $\{\alpha(2,0,1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, que é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ de dimensão 1. Então diz-se que 2 é um valor próprio de multiplicidade geométrica 1 e os vetores próprios associados a 2 são os elementos do conjunto

$$\mathcal{V}_2 = \langle \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \setminus \{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \}.$$

- $$(G - (-1)\,I)\,X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O conjunto das soluções do sistema é $\{\alpha(-1,0,1) + \beta(0,1,0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, que é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ de dimensão 2. Então diz-se que -1 é um valor próprio de multiplicidade geométrica 2 e os vetores próprios associados a -1 são os elementos do conjunto

$$\mathcal{V}_{-1} = \langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle \setminus \{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \}.$$

Exemplo 2

Considere-se a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\left| M - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2$$

As raízes do polinómio $-\lambda^3 + 3\lambda^2$ são 3 e 0, pois

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 = -\lambda^2(\lambda - 3).$$

Os valores próprios de M são 0, com multiplicidade algébrica 2, e 3, com multiplicidade algébrica 1.

Refletindo apenas sobre os valores próprios, seria capaz de dizer qual o valor de $|M|$?

Os vetores próprios são as soluções não nulas dos sistemas:

$$(M - 3\,I)\,X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e}$$

$$(M - 0\,I)\,X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M\,X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

isto é, os conjuntos dos vetores próprios associados a 3 e a 0 são, respetivamente,

$$\mathcal{V}_3 = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \setminus \{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \} \;\; e \;\; \mathcal{V}_0 = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \setminus \{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \}.$$

Neste caso 3 e 0 são valores próprios de multiplicidade geométrica 1.

Exemplo 3

Considere-se a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\left| A - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 3 + \lambda^2$$

e as raízes do polinómio $3+\lambda^2$ são $-i\sqrt{3}$ e $i\sqrt{3}$, ou seja, A não tem valores próprios reais. Consequentemente, também não existem vetores próprios com coordenadas reais.

Proposição

Seja A uma matriz quadrada e ordem n. As seguintes afirmações são equivalentes:

- A é invertível;
- $\mid A \mid \neq 0$;
- a caraterística de A é igual a n;
- $AX = 0$ tem apenas a solução trivial;
- as linhas (colunas) de A são linearmente independentes;
- $AX = B$ é possível e determinado, para qualquer matriz coluna B de tipo $n \times 1$;
- as linhas (colunas) de A identificam uma base de $\mathbb{R}^n$;
- 0 não é valor próprio de A.