nº ordem

Exame de Recurso de ÁLGEBRA LINEAR para a Engenharia

Licenciatura em Engenharia Informática/ Mestrado Integrado em Engenharia Informática

17de janeiro de 2025 Duração: **2h**

Nome : __________ Nº ______ Folha de continuação ____

1. **Nesta questão, responda a cada uma das alíneas apresentando apenas o resultado final no retângulo correspondente, sem justificação.**

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(a) Indique a coluna 2 da matriz produto AD.

$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

(b) Caso exista, indique uma matriz B tal que $(1,3,3,2)$ e $(-1,-1,1,3)$ são soluções do sistema $AX = B$.

$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

(c) Sabendo que C é invertível, indique o valor da entrada da matrix X solução da equação $CX = AD$ na posição $(3,2)$ (*i.e.* $[X]_{32}$).

$1/2$

(d) Diga se existe e, em caso afirmativo, indique uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída por vetores cujas coordenadas formam colunas da matriz A.

Não existe.

(e) Considere as seguintes bases de $\mathbb{R}^3$: $B = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ e B_3 a base canónica. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $M(f, B, B_3) = C$. Indique $f(-1,1,-1)$.

$(0, -2, 1)$

Cotação: cada alínea vale 1 valor.

Atenção que relativamente a cada uma das questões seguintes têm de ser atendidos os seguintes aspetos:

i) devem ser apresentados os cálculos essenciais e uma justificação cuidadosa da resposta, nos espaços imediatamente a seguir;
ii) a resolução de sistemas de equações lineares só pode ser feita pelo método de Gauss, de Gauss-Jordan ou pela regra de Cramer;
iii) o cálculo do valor de determinantes deve ser feito por aplicação do teorema de Laplace e/ou por aplicação de transformações elementares.

2. (a) Calcule o conjunto das soluções do sistema $\begin{cases} x & & +z & & = 0 \\ & 2y & +z & +w & = 0 \\ 2x & +2y & +2z & +w & = 0 \\ 3x & +2y & +3z & +w & = 0 \end{cases}$

(b) Sejam $\mathcal{S}_1 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x+2y+2z+w=0\}$ e $\mathcal{S}_2 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x+z=0,\ 2y+z+w=0,\ 3x+2y+3z+w=0\}$.

i. Verifique se $((1,0,-1,0),\ (0,1,-1,0), (-1,0,0,2))$ é uma base de $\mathcal{S}_1$.

ii. Verifique se $(0,-1,0,2) \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$.

iii. Verifique se existe um sistema de 2 equações lineares em 4 incógnitas cujo conjunto das soluções é $\mathcal{S}_2$. Em caso afirmativo, indique um tal sistema.

a) Vamos resolver o sistema pelo método de Gauss-Jordan.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1]{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - L_3]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_2]{}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 + L_3]{L_2 \leftarrow L_2 + L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow -L_3]{L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

O sistema do enunciado é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2} w \\ z = 0 \\ w \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Logo, o conjunto das soluções do sistema é $\{(0, -\frac{1}{2}a, 0, a) : a \in \mathbb{R}\}$.

b) i. $\mathcal{B} = ((1,0,-1,0), (0,1,-1,0), (-1,0,0,2))$ é uma base de S_1 se os 3 vetores de $\mathcal{B}$ pertencem a S_1, são linearmente independentes e geram S_1.

Cada um dos 3 vetores é solução da equação $2x+2y+2z+w=0$, pelo que pertencem a S_1.

$$r\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{=} r\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{=} r\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3}{=} r\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3$$

Destes cálculos concluímos que os vetores de $\mathcal{B}$ são linearmente

(continua na página seguinte)

independentes e que

$$\dim \langle (1,0,-1,0),(0,1,-1,0),(-1,0,0,2)\rangle = 3.$$

Pelo enunciado, sabemos que $S_1 \leq \mathbb{R}^4$ e $S_1 \neq \mathbb{R}^4$ (nem todos os vetores de $\mathbb{R}^4$ satisfazem a equação $2x+2y+2z+w=0$). Assim

$$3 = \dim \langle (1,0,-1,0),(0,1,-1,0),(-1,0,0,2)\rangle \leq \dim S_1 < \dim \mathbb{R}^4 = 4.$$

Logo $\dim S_1 = 3$ e $\mathcal{B}$ gera S_1.

Finalmente, podemos afirmar que $\mathcal{B}$ é uma base de S_1.

ii. $(0,-1,0,2) \in S_1 \cap S_2$ sse $(0,-1,0,2) \in S_1$ e $(0,-1,0,2) \in S_2$, o que significa que $(0,-1,0,2)$ satisfaz as equações $2x+2y+2z+w=0$, $x+z=0$, $2y+z+w=0$ e $3x+2y+3z+w=0$. Observando o sistema de a), então $(0,-1,0,2) \in S_1 \cap S_2$ sse $(0,-1,0,2)$ é solução do sistema, o que pelos cálculos efetuados em a) era equivalente a dizer que $(0,-1,0,2)$ é da forma $(0,-\frac{1}{2}a,0,a)$ para algum $a \in \mathbb{R}$. Fazendo $a=2$, conclui-se que $(0,-1,0,2) \in S_1 \cap S_2$.

iii. S_2 é o conjunto das soluções do sistema $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Usando cálculos efetuados em a), podemos afirmar que S_2 é o conjunto das soluções de $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Qualquer sistema equivalente a este terá como matriz dos coeficientes uma matriz A tal que $r(A) = r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 3$.

Logo é impossível A ter apenas 2 linhas, pelo que não existe um sistema com 2 equações cujo conjunto das soluções seja S_2.

(continua na página seguinte)

3. Seja $A_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t & 1 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ t & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule a expressão de $det\, A_t$ em função do parâmetro t.

(b) Determine um valor próprio de A_0.

(c) Considere a transformação linear $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\mathcal{M}(\phi; B_4, B_4) = A_2$, onde B_4 designa a base canónica de $\mathbb{R}^4$. Seja $S = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z = 0,\ x + 2z - w = 0\}$.

i. Calcule um vetor $v \in \mathbb{R}^4$ tal que $\phi(v) = (3,3,3,3)$. **ii.** Calcule $\mathrm{Nuc}\,\phi$. **iii.** Verifique se $(-2,-2,1,1) \in \phi(S)$.

a) $\det A_t \underset{\substack{\text{T. Laplace} \\ 2^{a} \text{ coluna}}}{=} t(-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ t & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} + t(-1)^{2+3} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ t & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} =$

$= t\Big(\underbrace{(-1)^{2+3} \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{T. Laplace} \\ 3^{a} \text{ coluna}}} - \underbrace{\Big(1(-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + 1(-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} t & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\Big)}_{\substack{\text{T. Laplace} \\ 1^{a} \text{ linha}}} \Big)$

$= t\big(-(-1) - ((-2) + (2t-1)) \big) = t(-2t+4) = -2t^2 + 4t$

b) Se $t=0$, então $\det A_0 = -2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 = 0$. Logo A_0 não é invertível e 0 é um valor próprio de A_0.

c) i. $\phi(v) = (3,3,3,3) \iff \mathcal{M}(\phi; B_4, B_4) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \iff A_2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$.

$\left[A_2 \,\middle|\, \begin{matrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{matrix} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -6 \end{array} \right] \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - L_3]{}$

$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$. Então $A_2 X = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x + 2z + w = 3 \\ y + 2z = 3 \\ -6z - w = -6 \end{cases}$.

Este sistema é possível e indeterminado e pretende-se conhecer uma soluç.

Se $w = 0$, então $\begin{cases} x + 2z = 3 \\ y + 2z = 3 \\ -6z = -6 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

Logo, podemos escolher $v = (1,1,1,0)$.

c) ii) Usando o calculo de c) i) temos que
$\mathrm{Nuc}\,\phi = \{ v \in \mathbb{R}^4 : \phi(v) = (0,0,0,0) \} = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Resolvendo o sistema, obtém-se:

$\begin{cases} x = 4z \\ y = -2z \\ w = -6z \end{cases}$, pelo que $\mathrm{Nuc}\,\phi = \{ (4z, -2z, z, -6z) : z \in \mathbb{R} \}$.

Continua.

COTAÇÃO: 2(a) 2 (b)i. 2 (b)ii. 1,5 (b)iii. 1 3(a)1,5 3(b) 1 3(c)i. 2 3(c)ii. 2 3(c)iii. 2

continuação em exame 3c:

3c) iii.

$$S = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : y = x+z,\ w = x+2z\}$$

$$= \{(x,\ x+z,\ z,\ x+2z) : x, z \in \mathbb{R}\}$$

$$= \langle (1,1,0,1),\ (0,1,1,2) \rangle$$

Então $\phi(S) = \langle \phi(1,1,0,1),\ \phi(0,1,1,2) \rangle = \langle (2,1,4,3),\ (4,3,3,2) \rangle$

porque $A_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $A_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Falta verificar se $(-2,-2,1,1) \in \langle (2,1,4,3), (4,3,3,2) \rangle$, ou seja, se $(-2,-2,1,1)$ é combinação linear de $(2,1,4,3)$ e $(4,3,3,2)$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1}]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -9 & 9 \\ 0 & -7 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{9}L_3 \\ L_4 \leftarrow \frac{1}{7}L_4}]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2}]{}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Então o sistema $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é possível pelo que

$(-2,-2,1,1) \in \phi(S)$.