nº ordem

Exame de Recurso de ÁLGEBRA LINEAR para a Engenharia

Licenciatura em Engenharia Informática/ Mestrado Integrado em Engenharia Informática

17de janeiro de 2025 Duração: **2h**

Nome : ______________________ Nº ________ Folha de continuação ______

1. **Nesta questão, responda a cada uma das alíneas apresentando apenas o resultado final no retângulo correspondente, sem justificação.**

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(a) Indique a linha 3 da matriz produto AD.

(b) Caso exista, indique uma matriz B tal que $(1,3,3,2)$ e $(-1,-1,1,3)$ são soluções do sistema $AX = B$.

(c) Sabendo que C é invertível, indique o valor da entrada da matrix X solução da equação $XC = AD$ na posição $(3,2)$ (*i.e.* $[X]_{32}$).

(d) Diga se existe e, em caso afirmativo, indique uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída por vetores cujas coordenadas formam colunas da matriz A.

(e) Considere as seguintes bases de $\mathbb{R}^3$: $B = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ e B_3 a base canónica. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $M(f, B, B_3) = C$. Indique $f(-1,1,-1)$.

Cotação: cada alínea vale 1 valor.

Atenção que relativamente a cada uma das questões seguintes têm de ser atendidos os seguintes aspetos:
i) devem ser apresentados os cálculos essenciais e uma justificação cuidadosa da resposta, nos espaços imediatamente a seguir;
ii) a resolução de sistemas de equações lineares só pode ser feita pelo método de Gauss, de Gauss-Jordan ou pela regra de Cramer;
iii) o cálculo do valor de determinantes deve ser feito por aplicação do teorema de Laplace e/ou por aplicação de transformações elementares.

2. (a) Calcule o conjunto das soluções do sistema $\begin{cases} x \quad\quad +z \quad\quad = 0 \\ \quad y \quad +z \quad +2w = 0 \\ 2x \quad +y \quad +2z \quad +2w = 0 \\ 3x \quad +y \quad +3z \quad +2w = 0 \end{cases}$.

   (b) Sejam $\mathcal{S}_1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x+y+2z+2w = 0\}$ e $\mathcal{S}_2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x+z = 0,\ y+z+2w = 0,\ 3x + y + 3z + 2w = 0\}$.

   i. Verifique se $\big((1, 0, -1, 0), (-1, 0, -1, 2), (-1, 0, 0, 2)\big)$ é uma base de $\mathcal{S}_1$.

   ii. Verifique se $(0, 4, 0, -2) \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$.

   iii. Verifique se existe um sistema de 4 equações lineares em 4 incógnitas cujo conjunto das soluções é $\mathcal{S}_2$. Em caso afirmativo, indique um tal sistema, justificando a sua escolha.

(continua na página seguinte)

(continua na página seguinte)

3. Seja $A_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 2 & t & 0 & 1 \\ t & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule a expressão de $det\, A_t$ em função do parâmetro t.

(b) Determine um valor próprio de A_1.

(c) Considere a transformação linear $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\mathcal{M}(\phi; B_4, B_4) = A_{-1}$, onde B_4 designa a base canónica de $\mathbb{R}^4$. Seja $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z = 0,\ x + 2z - w = 0\}$.

i. Calcule um vetor $v \in \mathbb{R}^4$ tal que $\phi(v) = (0, 0, 3, -1)$. **ii.** Calcule $\mathrm{Nuc}\,\phi$. **iii.** Verifique se $(-2, -2, 1, 1) \in \phi(S)$.

COTAÇÃO: 2(a) 2 (b)i. 2 (b)ii. 1,5 (b)iii. 1 3(a)1,5 3(b) 1 3(c)i. 2 3(c)ii. 2 3(c)iii. 2