nº ordem

Exame de Recurso de ÁLGEBRA LINEAR para a Engenharia

Licenciatura em Engenharia Informática/ Mestrado Integrado em Engenharia Informática

17de janeiro de 2025 Duração: **2h**

Nome : ______________________ Nº ________ Folha de continuação

1. **Nesta questão, responda a cada uma das alíneas apresentando apenas o resultado final no retângulo correspondente, sem justificação.**

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(a) Indique a linha 3 da matriz produto AD.

$[\,5 \quad 7 \quad 0\,]$

(b) Caso exista, indique uma matriz B tal que $(1,3,3,2)$ e $(-1,-1,1,3)$ são soluções do sistema $AX = B$.

Não existe.

(c) Sabendo que C é invertível, indique o valor da entrada da matrix X solução da equação $XC = AD$ na posição $(3,2)$ (*i.e.* $[X]_{32}$).

-1

(d) Diga se existe e, em caso afirmativo, indique uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída por vetores cujas coordenadas formam colunas da matriz A.

Não existe

(e) Considere as seguintes bases de $\mathbb{R}^3$: $B = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ e B_3 a base canónica. Seja $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $M(f,B,B_3) = C$. Indique $f(-1,1,-1)$.

$(0, -3, 2)$

Cotação: cada alínea vale 1 valor.

Atenção que relativamente a cada uma das questões seguintes têm de ser atendidos os seguintes aspetos:

i) devem ser apresentados os cálculos essenciais e uma justificação cuidadosa da resposta, nos espaços imediatamente a seguir;

ii) a resolução de sistemas de equações lineares só pode ser feita pelo método de Gauss, de Gauss-Jordan ou pela regra de Cramer;

iii) o cálculo do valor de determinantes deve ser feito por aplicação do teorema de Laplace e/ou por aplicação de transformações elementares.

2. (a) Calcule o conjunto das soluções do sistema $\begin{cases} x & & +z & & = 0 \\ & y & +z & +2w & = 0 \\ 2x & +y & +2z & +2w & = 0 \\ 3x & +y & +3z & +2w & = 0 \end{cases}$.

(b) Sejam $\mathcal{S}_1 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x+y+2z+2w = 0\}$ e $\mathcal{S}_2 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x+z = 0,\ y+z+2w = 0,\ 3x+y+3z+2w = 0\}$.

i. Verifique se $((1,0,-1,0), (-1,0,-1,2), (-1,0,0,2))$ é uma base de $\mathcal{S}_1$.

ii. Verifique se $(0,4,0,-2) \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$.

iii. Verifique se existe um sistema de 4 equações lineares em 4 incógnitas cujo conjunto das soluções é $\mathcal{S}_2$. Em caso afirmativo, indique um tal sistema, justificando a sua escolha.

a) Vamos resolver o sistema pelo método de Gauss.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1]{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - L_3]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_2]{}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$ Assim, o sistema do enunciado é equivalente ao

sistema: $\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z + 2w = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2w \\ z = 0 \\ w \in \mathbb{R} \end{cases}$

O conjunto das soluções é $\{(0,-2w,0,w) : w \in \mathbb{R}\}$.

b) i. O vetor $(-1,0,0,2) \notin S_1$ porque não é solução da equação $2x+y+2z+2w=0$ $(2(-1)+0+2\cdot 0+2\cdot 2 = 2 \neq 0)$. Logo a sequência dada não é uma base de S_1, pois os vetores não são todos elementos de S_1.

ii. $(0,4,0,-2) \in S_1 \cap S_2$ sse $(0,4,0,-2) \in S$ e $(0,4,0,-2) \in S_2$. Observando as equações lineares que caraterizam S_1 e S_2, e comparando com o sistema de a), conclui-se que $(0,4,0,-2) \in S_1 \cap S_2$ sse $(0,4,0,-2)$ é solução do sistema de a), isto é, se é da forma $(0,-2w,0,w)$ com $w \in \mathbb{R}$.

(continua na página seguinte)

Fazendo $w=-2$, conclui-se que $(0,4,0,-2) \in S_1 \cap S_2$.

iii) S_2 é o conjunto das soluções do sistema

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z + 2w = 0 \\ 3x + y + 3z + 2w = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Obtém-se um sistema equivalente se acrescentarmos uma equação que resulta de efetuar transformações elementares sobre as equações do sistema acima. Por exemplo, fazendo

$$(y+z+2w) - (x+z) = (0-0)$$

obtém-se a equação $-x+y+2w=0$. O sistema em (1) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ -x + y + 2w = 0 \\ y + z + 2w = 0 \\ 3x + y + 3z + 2w = 0 \end{cases}$$

pelo que este sistema de 4 equações em 4 incógnitas tem como conjunto de soluções S_2.

(continua na página seguinte)

3. Seja $A_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 2 & t & 0 & 1 \\ -t & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule a expressão de $det\, A_t$ em função do parâmetro t.

(b) Determine um valor próprio de A_1.

(c) Considere a transformação linear $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\mathcal{M}(\phi; B_4, B_4) = A_{-1}$, onde B_4 designa a base canónica de $\mathbb{R}^4$. Seja $S = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z = 0,\ x + 2z - w = 0\}$.

i. Calcule um vetor $v \in \mathbb{R}^4$ tal que $\phi(v) = (0,0,3,-1)$. **ii.** Calcule $\mathrm{Nuc}\,\phi$. **iii.** Verifique se $(-2,-2,1,1) \in \phi(S)$.

a) $\det A_t \underset{\substack{\text{T. Laplace} \\ 2^{\text{a}}\text{ linha}}}{=} t(-1)^{2+2} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{\text{T. Laplace} \\ 2^{\text{a}}\text{ coluna}}}{=} t \cdot 2(-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ t & 0 \end{bmatrix} = -2t(-t) = 2t^2$

b) $\det(A_1 - \lambda I_4) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \underset{\substack{\text{T. Laplace} \\ 2^{\text{a}}\text{ linha}}}{=} (1-\lambda)(-1)^{2+2} \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$.

λ é valor próprio de A_1 sse $\det(A_1 - \lambda I_4) = 0$.

$\det(A_1 - \lambda I_4) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda) \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = 0$

Logo $\lambda = 1$ é um valor próprio de A_1.

c) i. $\phi(v) = (0,0,3,1) \Leftrightarrow \mathcal{M}(\phi; B_4, B_4) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A_{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

Pretende-se determinar uma soluç do sistema.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_4 \leftarrow 2L_4 + L_3]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

O sistema é possível e determinado, ou seja, tem uma única soluç.

$$\begin{cases} x + 2z + w = 0 \\ y = 0 \\ -4z - w = 3 \\ w = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 \\ w = 1 \end{cases}$$

Logo $v = (1,0,-1,1)$.

ii. Como $r(A_1) = 4$ (pela condensaç feita em c i)), então o sistema $A_{-1}X = 0$ tem uma única soluç que é a soluç nula. Assim,

$\mathrm{Nuc}\,\phi = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \phi(x,y,z,w) = (0,0,0,0)\}$

$= \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : A_{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

$= \{(0,0,0,0)\}$.

Continua

COTAÇÃO: 2(a) 2 (b)i. 2 (b)ii. 1,5 (b)iii. 1 3(a)1,5 3(b) 1 3(c)i. 2 3(c)ii. 2 3(c)iii. 2

c) iii:

Começamos por resolver o sistema $A_{-1} X = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Fazendo a mesma sequência de cálculos de c) i, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}$$

A soluçã de $A_1 X = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é a soluçã de $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}$.

$$\begin{cases} x + 2z + w = -2 \\ y = 2 \\ -4z - w = 7 \\ w = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = -1 \\ w = -3 \end{cases}$$

Então $(3, 2, -1, -3)$ é o único vetor cuja imagem por ϕ é $(-2, -2, 1, 1)$.

Falta verificar se $(3, 2, -1, -3)$ é um vetor de S. Como $(3, 2, -1, -3)$ não satisfaz a equação $x + 2z - w = 0$ $(3 + 2\cdot(-1) - (-3) = 4 \neq 0)$, então $(3, 2, -1, -3) \notin S$. Logo $(-2, -2, 1, 1) \notin \phi(S)$.