

Exame de Álgebra Linear CC  
Época de Recurso

duração: 2h30min

Nome do aluno: \_\_\_\_\_ Número: \_\_\_\_\_

**Grupo I**

Relativamente às questões deste grupo, indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando a opção conveniente.

- |   | V                        | F                        |
|---|--------------------------|--------------------------|
| 1. Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ , se $A + B$ é uma matriz simétrica, então $A$ e $B$ são matrizes simétricas.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2. Para quaisquer $A, B, C \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ , se $A \neq 0_{2 \times 2}$ e $AB = AC$ , então $B = C$ .   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3. Para quaisquer $A, B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ , se $\text{car}(AB) = 3$ , então $A$ e $B$ são matrizes invertíveis.   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4. O conjunto $\{A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \mid A \text{ é triangular superior}\}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ de dimensão 9.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5. A aplicação $f : \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ definida por $f(A) = A^T$ , para qualquer $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ , é uma aplicação linear. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6. Para quaisquer $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ e $u, v \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$ , se $u$ e $v$ são vetores próprios de $A$ , então $u + v$ é um vetor próprio de $A$ .                     | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**Grupo II**

Resolva cada uma das questões deste grupo na folha de exame. Justifique as suas respostas.

1. Sejam  $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$  e  $B, C, D$  matrizes tais que:

- $B \in \mathcal{M}_{3 \times 4}(\mathbb{R})$  é uma matriz em escada e  $\text{car}(B) = 2$ ;
- $C, D \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ ,  $\det C = -15$  e  $D$  é uma matriz obtida de  $C$  efetuando a sequência de operações elementares a seguir indicada

$$l_1 \rightarrow l_1 + 4l_2, \quad c_3 \rightarrow 5c_3, \quad c_2 \leftrightarrow c_1, \quad l_2 \rightarrow \frac{1}{6}l_2.$$

- (a) Calcule  $|A|$ .
- (b) Justifique que a matriz  $A$  é invertível e determine a sua inversa utilizando o método de Gauss-Jordan.

(c) Classifique os sistemas:

$$\text{i. } B \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}. \quad \text{ii. } B \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad \text{iii. } B^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(d) Indique o determinante de  $D$ .

2. Considere, no espaço vetorial real  $\mathbb{R}^3$ , os subespaços vetoriais

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 2y = 0\} \quad \text{e} \quad G = \langle (1, -1, 1), (2, 0, 2) \rangle.$$

(a) Mostre que  $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z - x = 0\}$ .

(b) Diga, justificando, se  $F \cup G$  é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^3$ .

(c) Determine a dimensão de  $F$ .

(d) Determine uma base de  $F + G$  e justifique que esta soma não é direta.

3. Sejam  $\mathcal{B}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathcal{B}'$  a base de  $\mathbb{R}^3$  definida por  $\mathcal{B}' = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ . Sejam  $f$  e  $g$  os endomorfismos de  $\mathbb{R}^3$  definidos por

$$f(1, 0, 0) = (2, -1, -1), f(0, 1, 0) = (-2, 1, 1), f(0, 0, 1) = (0, 0, 5)$$

e

$$M(g, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Justifique que  $\text{Nuc } f = \langle (1, 1, 0) \rangle$ . Diga se  $f$  é injetiva e se é sobrejetiva.

(b) Determine as matrizes  $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$  e  $M(f \circ g; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ .

(c) Verifique que  $(1, 1, 0)$  e  $(1, 0, 1)$  são vetores próprios de  $g$  associados ao mesmo valor próprio. Indique esse valor próprio.

(d) Justifique que 1 é um valor próprio de  $g$  e indique um vetor próprio de  $g$  associado a este valor próprio.

(e) Justifique que  $g$  é diagonalizável.

Cotação - Grupo I:  $6 \times 0,5$ .

Grupo II: 1.(1, 5+1, 5+1, 5+1, 0); 2.(1, 25+0, 75+1, 25+1, 5); 3.(1, 5+1, 5+1, 25+1, 5+1, 0).