Universidade do Minho	Lic. em Ciências da Computação
Departamento de Matemática	26 de janeiro de 2024

Exame de Álgebra Linear CC

Época de Recurso

duração: 2h30min

Nome do aluno: ______________________________ Número: ________

Grupo I

Relativamente às questões deste grupo, indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando a opção conveniente.

	V	F
1. Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se $A + B$ é uma matriz simétrica, então A e B são matrizes simétricas.	☐	☒

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrica, mas as matrizes A e B não são simétricas.

	V	F
2. Para quaisquer $A, B, C \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, se $A \neq 0_{2\times 2}$ e $AB = AC$, então $B = C$.	☐	☒

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Então $A \neq 0_{2\times 2}$, $AB = 0_{2\times 2} = AC$, mas $B \neq C$.

	V	F
3. Para quaisquer $A, B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, se $car(AB) = 3$, então A e B são matrizes invertíveis.	☒	☐

Se $A, B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ são matrizes tais que $car(AB) = 3$, então, considerando que $AB \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, a matriz AB é invertível. Consequentemente, como A e B são matrizes quadradas e AB é invertível, as matrizes A e B também são invertíveis.

	V	F
4. O conjunto $\{A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \,\|\, A \text{ é triangular superior}\}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ de dimensão 9.	☐	☒

Seja $S = \{A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mid A \text{ é triangular superior}\}$. O conjunto S é um subespaço vetorial de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, mas o espaço S tem dimensão 6.

V F

5. A aplicação $f : \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ definida por $f(A) = A^T$, para qualquer $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, é uma aplicação linear. ☒ ☐

A aplicação f é uma aplicação linear, pois:

- para quaisquer $A, B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$,

$$f(A+B) = (A+B)^T = A^T + B^T = f(A) + f(B).$$

- para quaisquer $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$f(\alpha A) = (\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha f(A).$$

6. Para quaisquer $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e $u, v \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$, se u e v são vetores próprios de A, então $u + v$ é um vetor próprio de A. ☐ ☒

Sejam $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $u = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Então u e v são vetores próprios de A (ambos associados ao valor próprio 0) mas $u + v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ não é vetor próprio de A.

Grupo II

Resolva cada uma das questões deste grupo na folha de exame. Justifique as suas respostas.

1. Sejam $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ e B, C, D matrizes tais que:

- $B \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ é uma matriz em escada e $car(B) = 2$;
- $C, D \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, $\det C = -15$ e D é uma matriz obtida de C efetuando a sequência de operações elementares a seguir indicada

$$l_1 \to l_1 + 4l_2, \quad c_3 \to 5c_3, \quad c_2 \leftrightarrow c_1, \quad l_2 \to \frac{1}{6} l_2.$$

(a) Calcule $|A|$.

Calculando o $\det A$ recorrendo ao Teorema de Laplace, temos

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1} \times 3 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \times 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 3 \times (1 \times 2 - 4 \times (-1)) + 2 \times (3 \times (-1) - 1 \times 3) \\ &= 6. \end{aligned}$$

(b) Justifique que a matriz A é invertível e determine a sua inversa utilizando o método de Gauss-Jordan.

Uma vez que A é uma matriz quadrada e $|A| \neq 0$, então A é invertível. Aplicando o método de eliminação de Gauss-Jordan à matriz $[A_1|I_3]$, temos

$$
[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to l_3 - \frac{2}{3}l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow[l_3 \to l_3 - 2l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{2}{3} & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 + \frac{1}{2}l_3 \\ l_1 \to l_1 - \frac{3}{2}l_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 3 & 0 & 2 & 3 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{2}{3} & -2 & 1 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow[l_1 \to l_1 - 3l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{2}{3} & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_1 \to \frac{1}{3}l_1 \\ l_3 \to \frac{1}{2}l_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right].
$$

Dos cálculos anteriores, concluímos que

$$
A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.
$$

(c) Classifique os sistemas:

i. $B \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$

Seja $b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$. Considerando que B é uma matriz em escada e $car(B) = 2$, a matriz $[B|b]$ também é uma matriz escada e tem-se $car([B|b]) = 3$. Então, como $car(B) \neq car([B|b])$, o sistema é impossível.

ii. $B \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$

Seja $b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$. Uma vez que B é uma matriz em escada e $car(B) = 2$, a matriz $[B|b]$ também é uma matriz escada e tem-se $car([B|b]) = 2$. Então $car(B) = car([B|b])$, pelo que o sistema é possível. Como $car(B) = 2 < 4 =$ nº incógnitas, o sistema é indeterminado.

iii. $B^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

O sistema é um sistema homogéneo e, portanto, é possível. Considerando que $car(B^T) = car(B)$, tem-se $car(B^T) = 2 <$ nº incógnitas, pelo que o sistema é indeterminado.

(d) Indique o determinante de D.

Atendendo às propriedades de determinates, tem-se

$$|C| = (-1) \times \frac{1}{5} \times 6 \times |D|.$$

Logo $|D| = -\frac{25}{2}$.

2. Considere, no espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, os subespaços vetoriais

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x + 2y = 0\} \quad \text{e} \quad G =< (1,-1,1),(2,0,2) > .$$

(a) Mostre que $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z - x = 0\}$.

Tem-se

$$\begin{aligned}
\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z - x = 0\} &= \{(z,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = z\} \\
&= \{(z,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y,z \in \mathbb{R}\} \\
&= \{y(0,1,0) + z(1,0,1) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y,z \in \mathbb{R}\} \\
&= < (0,1,0),(1,0,1) > \\
&\overset{(1)}{=} < (1,-1,1),(1,0,1) > \\
&\overset{(2)}{=} < (1,-1,1),(2,0,2) > \\
&= G.
\end{aligned}$$

(1) $(1,-1,1) = (-1)(0,1,0) + 1(1,0,1)$.
(2) $(2,0,2) = 0(1,-1,1) + 2(1,0,1)$.

(b) Diga, justificando, se $F \cup G$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

O conjunto $F \cup G$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ se e só se $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.
Ora, considerando que $F \nsubseteq G$ (pois $(1,-1,0) \in F$ e $(1,-1,0) \notin G$) e $G \nsubseteq F$ (pois $(1,0,1) \in G$ e $(1,0,1) \notin F$) concluímos que $F \cup G$ não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

(c) Determine a dimensão de F.

No sentido de determinarmos a dimensão de F comecemos por determinar uma base de F.
Tem-se

$$\begin{aligned}
F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x + 2y = 0\} &= \{(z,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = -y\} \\
&= \{(-y,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y,z \in \mathbb{R}\} \\
&= \{y(-1,1,0) + z(0,0,1) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y,z \in \mathbb{R}\} \\
&= < (-1,1,0),(0,0,1) >,
\end{aligned}$$

pelo que $\{(-1,1,0),(0,0,1)\}$ é um conjunto gerador de F. A sequência $((-1,1,0),(0,0,1))$ é linearmente independente, pois, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\alpha(-1,1,0) + \beta(0,0,1) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Logo $((-1,1,0),(0,0,1))$ é uma base de F.

(d) Determine uma base de $F + G$ e justifique que esta soma não é direta.

Tem-se

$$\begin{aligned}
F + G &= < (-1,1,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,1) > \\
&\overset{(1)}{=} < (0,0,1),(0,1,0),(1,0,1) > .
\end{aligned}$$

(1) $(-1,1,0) = 1.(0,0,1) + 1.(0,1,0) - 1.(1,0,1)$.

A sequência $((0,0,1),(0,1,0),(1,0,1))$ é linearmente independente, pois, para quaisquer $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$,

$$\alpha(0,0,1) + \beta(0,1,0) + \gamma(1,0,1) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Logo, $((0,0,1),(0,1,0),(1,0,1))$ é uma base de $F+G$.

A soma $F+G$ é uma soma direta se $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Ora, atendendo a que

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G),$$

$\dim(F+g) = 3$, $\dim F = 2$ e $\dim G = 2$, concluímos que $\dim(F \cap G) = 1$ e, portanto, $F \cap G \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Logo, $F+G$ não é uma soma direta.

3. Sejam $\mathcal{B}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}'$ a base de $\mathbb{R}^3$ definida por $\mathcal{B}' = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$. Sejam f e g os endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ definidos por

$$f(1,0,0) = (2,-1,-1), f(0,1,0) = (-2,1,1), f(0,0,1) = (0,0,5)$$

e

$$M(g,\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Justifique que $\mathrm{Nuc} f =< (1,1,0) >$. Diga se f é injetiva e se é sobrejetiva.

Pela definição de f e por definição de $\mathrm{Nuc} f$, temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Nuc} f &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, f(x,y,z) = (0,0,0)\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, f(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)) = (0,0,0)\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, xf(1,0,0) + yf(0,1,0) + zf(0,0,1)) = (0,0,0)\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x(2,-1,-1) + y(-2,1,1) + z(0,0,5) = (0,0,0)\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (2x-2y, -x+y, -x+y+5z) + y(-2,1,1) + z(0,0,5) = (0,0,0)\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = y, z = 0\} \\
&= \{(y,y,0) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y \in \mathbb{R}\} \\
&= \{y(1,1,0) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y \in \mathbb{R}\} \\
&= < (1,1,0) > .
\end{aligned}$$

(b) Determine as matrizes $M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}')$ e $M(f \circ g;\mathcal{B},\mathcal{B}')$.

Temos

$$\begin{aligned}
f(1,0,0) &= (2,-1,-1) = 3(1,0,0) + 0(1,1,0) + (-1)(1,1,1) \\
f(0,1,0) &= (-2,1,1) = -3(1,0,0) + 0(1,1,0) + 1(1,1,1) \\
f(0,0,1) &= (0,0,5) = 0(1,0,0) - 5(1,1,0) + 5(1,1,1).
\end{aligned}$$

Logo

$$M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned}
M(f \circ g;\mathcal{B},\mathcal{B}') &= M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}')M(g;\mathcal{B},\mathcal{B}) \\
&= \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 5 & -5 & -20 \\ -5 & 5 & 17 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

(c) Verifique que $(1,1,0)$ e $(1,0,1)$ são vetores próprios de g associados ao mesmo valor próprio. Indique esse valor próprio.

Tem-se

$$(1,1,0) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1),$$

pelo que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é o vetor coluna de $(1,1,0)$ relativamente à base $\mathcal{B}$. Logo

$$M(g;\mathcal{B},\mathcal{B})\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é o vetor coluna de $g(1,1,0)$ relativamente à base $\mathcal{B}$. Portanto,

$$g(1,1,0) = 3(1,0,0) + 3(0,1,0) + 0(0,0,1) = (3,3,0).$$

Uma vez que $(1,1,0) \neq (0,0,0)$ e $g(1,1,0) = 3(1,1,0)$, então $(1,1,0)$ é um vetor próprio de g associado ao valor próprio 3.

Relativamente ao vetor $(1,0,1)$ temos

$$(1,0,1) = 1(1,0,0) + 0(0,1,0) + 1(0,0,1),$$

pelo que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

é o vetor coluna de $(1,0,1)$ relativamente à base $\mathcal{B}$. Logo

$$M(g;\mathcal{B},\mathcal{B})\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

é o vetor coluna de $g(1,0,1)$ relativamente à base $\mathcal{B}$. Portanto,

$$g(1,0,1) = 3(1,0,0) + 0(0,1,0) + 3(0,0,1) = (3,0,3).$$

Uma vez que $(1,0,1) \neq (0,0,0)$ e $g(1,0,1) = 3(1,0,1)$, então $(1,0,1)$ é um vetor próprio de g associado ao valor próprio 3.

(d) Justifique que 1 é um valor próprio de g e indique um vetor próprio de g associado a este valor próprio.

Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, λ é valor próprio de g se e só se $|M(g;\mathcal{B},\mathcal{B}) - \lambda I_3| = 0$.
Então, como

$$\begin{aligned}
|M(g;\mathcal{B},\mathcal{B}) - I_3| &= \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{2+1} \times 1 \times \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + (-1)^{3+1} \times (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= -(2 \times 3 - 1 \times 2) - (2 \times (-1) - 1 \times 2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

concluímos que 1 é um valor próprio de g.

Pretendemos determinar um vetor próprio de g associado ao valor próprio 1, ou seja, pretende-se determinar um vetor $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ tal que $g(a,b,c) = 1.(a,b,c)$.

Dado $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, tem-se $(a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$, pelo que

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

é o vetor coluna de (a,b,c) relativamente à base $\mathcal{B}$. Logo

$$M(g;\mathcal{B},\mathcal{B})\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2b+2c \\ a+2b-c \\ -a+b+4c \end{bmatrix}$$

é o vetor coluna de $g(a,b,c)$ relativamente à base $\mathcal{B}$ e, portanto,

$$\begin{aligned} g(a,b,c) &= (a+2b+2c)(1,0,0) + (a+2b-c)(0,1,0) + (-a+b+4c)(0,0,1) \\ &= (a+2b+2c, a+2b-c, -a+b+4c). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} g(a,b,c) = (a,b,c) &\Leftrightarrow (a+2b+2c, a+2b-c, -a+b+4c) = (a,b,c) \\ &\Leftrightarrow (2b+2c, a+b-c, -a+b+3c) = (0,0,0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2b+2c=0 \\ a+b-c=0 \\ -a+b+3c=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a=2c \\ b=-c \end{cases} \end{aligned}$$

Por conseguinte, todos os vetores de $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a = 2c, b = -c\} \setminus \{(0,0,0)\}$ são vetores próprios de g associados ao valor próprio 1. Em particular, $(2,-1,1)$ é um desses vetores próprios.

(e) Justifique que g é diagonalizável.

Um endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ diz-se diagonalizável se existir uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vetores próprios de g.

Das alíneas anteriores sabe-se que $(1,1,0)$, $(1,0,1)$ e $(2,-1,1)$ são vetores próprios de g. A sequência $((1,1,0),(1,0,1),(2,-1,1))$ é linearmente independente, pois $((2,-1,1))$ e $((1,1,0),(1,0,1))$ são sequências linearmente independentes formadas por vetores próprios de g e os vetores de cada sequência estão associados a valores próprios distintos.

Considerando que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ e $((1,1,0),(1,0,1),(2,-1,1))$ é uma sequência com 3 vetores linearmente independente, concluímos que esta sequência é uma base de $\mathbb{R}^3$. Assim, existe uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vetores próprios de g e, portanto, g é diagonalizável.

Cotação - Grupo I: $6 \times 0,5$.

Grupo II: 1.$(1,5+1,5+1,5+1,0)$; 2.$(1,25+0,75+1,25+1,5)$; 3.$(1,5+1,5+1,25+1,5+1,0)$.