Álgebra Linear

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Teste 1 - $\boxed{\text{A1}}$

Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática

16 novembro 2020 — Duração: 1h 30m

Nome: ______________________ Número: ________

Responda às questões 1. a 4. nos espaços indicados, sem apresentar os seus cálculos.

1. Considere as matrizes

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\2&3&0\end{pmatrix}\quad \text{e}\quad B=\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\2&0&-1&b\\1&3&-2&6-b\end{pmatrix}.$$

a) O elemento na posição $(2,3)$ da matriz $3A^TB$ é: -27.

Temos

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\2&3&0\end{pmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&3\\-1&1&0\end{pmatrix}.$$

Assim, o elemento na posição $(2,3)$ da matriz $3A^TB$ é dado por:

$$3\underbrace{\begin{pmatrix}2&1&3\end{pmatrix}}_{\text{linha 2 de } A^T}\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}}_{\text{col. 3 de } B}=3(-2-1-6)=-27.$$

b) A característica da matriz B é: 2.

$$B=\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\2&0&-1&b\\1&3&-2&6-b\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}]{}\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&-2&1&b-4\\0&2&-1&4-b\end{pmatrix}\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3+L_2]{}\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&-2&1&b-4\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

c) A matriz com forma em escada reduzida equivalente por linhas a A é: I_3.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\2&3&0\end{pmatrix}\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-2L_1]{}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\0&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3+L_2]{}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

Como A é uma matriz quadrada de ordem 3 com característica 3, a matriz com forma em escada reduzida equivalente por linhas a A é a matriz I_3.

d) A matriz $X=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\2/3&2/3&-1/3\\-2/3&x&1/3\end{pmatrix}$ é a inversa de A se e só se $x=\dfrac{1}{3}$.

A matriz X é a inversa de A se e só se $AX=I_3$. Mas,

$$AX=I_3\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\2&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1&1\\2/3&2/3&-1/3\\-2/3&x&1/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&1/3-x&0\\0&2/3+x&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \tfrac{1}{3}-x=0\wedge\tfrac{2}{3}+x=1\Leftrightarrow x=1/3.$$

2. **a)** Seja A uma matriz quadrada de ordem n tal que $A^2 + 2A - 3I_n = \mathbf{0}_{n\times n}$. Então, A é invertível e $A^{-1} = \frac{1}{3}(A + 2I_n)$.

Temos

$$A^2+2A-3I_n = \mathbf{0}_{n\times n} \Leftrightarrow A^2+2A = 3I_n \Leftrightarrow A(A+2I_n) = 3I_n \Leftrightarrow \tfrac{1}{3}A(A+2I_n) = I_n \Leftrightarrow A(\tfrac{1}{3}(A+2I_n)) = I_n,$$

o que mostra que a inversa de A é a matriz $\frac{1}{3}(A + 2I_n)$.

Nota: Alguns alunos indicaram como resposta $A^{-1} = \frac{A+2}{3}$. Note-se que $A + 2$ não faz sentido, já que não definimos a adição de um escalar a uma matriz, nem se entende como isso deveria ser interpretado. (O que teríamos de fazer era formar a matriz $A + 2I_n$, a qual se obtém adicionando 2 aos elementos da diagonal de A); também (embora essa seja uma imprecisão e não um erro grave) não falámos na divisão de uma matriz por um número, mas sim na multiplicação de um escalar por uma matriz, pelo que devemos escrever $\frac{1}{3}(A + 2I_n)$ e não $\frac{A+2I_n}{3}$.

b) Se A é uma matriz de ordem 4×3, tal que car $A = 3$, então o sistema $A^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem sempre solução seja qual for o vetor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{3\times1}$? Sim.

Temos

$$A \in \mathbb{R}^{4\times3} \Rightarrow A^T \in \mathbb{R}^{3\times4} \Rightarrow (A^T|\mathbf{b}) \in \mathbb{R}^{3\times5}.$$

Como car A = car $A^T = 3$, tem-se car$(A^T|\mathbf{b}) = 3$ (já que a característica de uma matriz não pode exceder o número de linhas dessa matriz); logo, seja qual for o vetor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{3\times1}$, tem-se car$(A)$ = car$(A|\mathbf{b}) = 3$, pelo que o sistema tem sempre solução.

Nota: Na versão $A2$ do teste, o sistema considerado era $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, com $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{4\times1}$; neste caso, a característica da matriz ampliada $(A|\mathbf{b})$ (que é uma matriz 4×4) poderá, para alguns vetores $\mathbf{b}$, ser igual a 4, ou seja, ser superior à característica de A, sendo o correspondente sistema impossível; logo, a resposta seria: **Não**.

c) A matriz $\begin{pmatrix} x-1 & 2 \\ 4 & x-3 \end{pmatrix}$ é invertível se e e só se $x \neq -1$ e $x \neq 5$.

Como sabemos, uma matriz quadrada é invertível se e só se o seu determinante for diferente de zero. Temos

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ 4 & x-3 \end{vmatrix} = (x-1)(x-3) - 8 = x^2 - 4x - 5.$$

Como

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 5,$$

concluímos que a matriz é invertível se e só se $x \neq -1$ e $x \neq 5$.

Nota: Alguns alunos preferiram determinar para que valores de x a matriz teria característica igual a 2, convertendo a matriz dada na forma em escada; nesse processo, assumiram $x - 1 \neq 0$, ou seja, $x \neq 1$, dando como resposta (incorreta) que os valores de x para os quais matriz é invertível são $x \neq -1$, $x \neq 5$ e $x \neq 1$. Note-se, que para $x = 1$, se tem

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

ou seja, a matriz tem característica 2, logo é invertível.

d) Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$. Então $A^{45} = A$.

Temos

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Teremos $A^3 = A^2A = I_2A = A$, $A^4 = A^3A = AA = A^2 = I_2$, ..., ou seja, é imediato reconhecer que

$$A^k = \begin{cases} I_2, & \text{se } k \text{ par} \\ A, & \text{se } k \text{ ímpar} \end{cases}.$$

Logo, $A^{45} = A$.

3. Sejam $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ -a & a & b & c \\ -d & d & e & f \\ -g & g & h & i \end{pmatrix}$, e suponha que $\det A = 2$.

a) O valor do determinante da matriz $3A^2$ é: 108.
Temos $\det(3A^2) \underset{①}{=} 3^3(\det A)^2 = 27 \times 4 = 108$.

① Propriedade 4 e Propriedade 10 dos determinantes.

b) O valor do determinante da matriz B é: 4.

$$\det B = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ -a & a & b & c \\ -d & d & e & f \\ -g & g & h & i \end{vmatrix} \underset{①}{=} (-1) \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + 3 \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} -a & b & c \\ -d & e & f \\ -g & h & i \end{vmatrix}$$

$$\underset{②}{=} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} - 3 \times (-1) \times \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\det A + 3\det A = 2\det A = 4.$$

Justificações:

① Usando o teorema de Laplace ao longo da primeira linha (ou a definição de determinante).

② Propriedade 4 dos determinantes.

c) O complemento algébrico do elemento na posição $(1, 2)$ da matriz B é: 2.

$$B_{12} = (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} -a & b & c \\ -d & e & f \\ -g & h & i \end{vmatrix} \underset{①}{=} (-1)^3 \times (-1) \times \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \det A = 2.$$

① Propriedade 4 dos determinantes.

d) O elemento na posição $(2, 1)$ da matriz B^{-1} é: $\frac{1}{2}$.
Como $B^{-1} = \frac{1}{\det B} \operatorname{adj} B = \frac{1}{\det B} \hat{B}^T$, o elemento na posição $(2, 1)$ da matriz B^{-1} obtém-se dividindo B_{12} pelo valor do determinante de B, ou seja, é: $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

4. Considere um sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ cuja matriz ampliada é:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & a-1 & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a+2 \end{array}\right), \quad a \in \mathbb{R}.$$

a) O sistema é impossível para $a = 1$ ou $a = 2$.
Temos

$$a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 2 \vee a = -2$$

$$a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2$$

$$a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

Então:

- para $a=2$, tem-se car $A=2$ e car$(A|b)=3$ e o sistema é impossível
- para $a=-2$, tem-se car $A=$ car$(A|b)=2$ e o sistema é possível e simplesmente indeterminado
- para $a=1$, tem-se

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3+3L_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Como car $A=2<$ car$(A|b)=3$, o sistema é impossível.

Logo, o sistema é impossível para $a=1$ ou $a=2$.

Nota: Muitos alunos não analisaram o caso $a=1$; nesse caso, como vimos, a matriz do sistema não estava ainda na forma em escada, sendo necessário convertê-la nessa forma.

b) O sistema é possível e indeterminado para $a=-2$, sendo o conjunto das suas soluções

$S=\{(2+\frac{\alpha}{3}, 1+\frac{\alpha}{3}, \alpha): \alpha \in \mathbb{R}\}$ (ou $S=\{(2+\alpha, 1+\alpha, 3\alpha): \alpha \in \mathbb{R}\}$ ou $S=\{(1+\alpha, \alpha, -3+3\alpha): \alpha \in \mathbb{R}\}$).

Já vimos acima que o sistema é indeterminado para $a=-2$. Nesse caso, tem-se seguinte matriz ampliada do sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

a qual corresponde ao sistema

$$\begin{cases} x+2y-z=4 \\ -3y+z=-3 \end{cases}$$

Temos

$$\begin{cases} x+2y-z=4 \\ -3y+z=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=z+4 \\ -3y=-z-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+\frac{z}{3} \\ y=1+\frac{z}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+\frac{\alpha}{3} \\ y=1+\frac{\alpha}{3} \\ z=\alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Logo, o conjunto das soluções do sistema é:

$$S=\{(2+\frac{\alpha}{3}, 1+\frac{\alpha}{3}, \alpha): \alpha \in \mathbb{R}\}=\{(2+\alpha, 1+\alpha, 3\alpha): \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Alguns alunos poderão ter resolvido doutro modo.

$$\begin{cases} x+2y-z=4 \\ -3y+z=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-z=4-2y \\ z=-3+3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+y \\ z=-3+3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=\alpha \\ z=-3+3\alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R},$$

vindo, neste caso, S descrito da seguinte forma: $S=\{(1+\alpha, \alpha, -3+3\alpha): \alpha \in \mathbb{R}\}$.

c) O sistema homogéneo $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ tem soluções não nulas para $a=-2$ ou $a=1$ ou $a=2$.

O sistema homogéneo terá soluções não nulas (ou seja, será indeterminado) quando a característica de A for inferior a 3, ou seja, tendo em conta o que vimos acima, quando $a=1$ ou $a=-2$ ou $a=2$.

d) $(4, \frac{1}{2}, 1)$ é solução do sistema se e só se $a=3$.

$(4, \frac{1}{2}, 1)$ é solução do sistema $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ a-1 \\ a+2 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{a}{2}+\frac{1}{2} \\ a^2-4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ a-1 \\ a+2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{2}+\frac{1}{2}=a-1 \\ a^2-4=a+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ a^2-a-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ a=3 \vee a=-2 \end{cases} \Leftrightarrow a=3.$$

Responda à próxima questão numa folha de teste, apresentando os seus cálculos.

5. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule o valor de $\det A$.

Apresenta-se uma possível resolução; naturalmente, haveria muitos outros processos de calcular o valor do determinante.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \underset{①}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \underset{②}{=} 1 \times (-1)^2 \times \begin{vmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{③}{=} (-2-15) - (-10-2) = -17 + 12 = -5.$$

Justificações das passagens:

① $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$; $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$

② Usando o Teorema de Laplace ao longo da primeira coluna.

③ Usando a regra de Sarrus.

b) Justifique que A é invertível e calcule a segunda coluna de A^{-1}.

A matriz A é invertível porque o seu determinante é diferente de zero.

Para calcularmos a segunda coluna de A^{-1} podemos resolver o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_2$, onde $\mathbf{e}_2$ é a segunda coluna da matriz identidade (de ordem 4).

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_4]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

Tem-se, então

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ -5x_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3/5 \\ x_2 = 1/5 \\ x_3 = -1/5 \\ x_4 = -1/5 \end{cases}$$

Logo, a segunda coluna de A^{-1} é: $\begin{pmatrix} 3/5 \\ 1/5 \\ -1/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}$

Alguns alunos preferiram usar o método da adjunta para calcular a segunda coluna de A^{-1}. Como sabemos, $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$ e $\operatorname{adj} A = \hat{A}^T$, onde $\hat{A}$ designa a matriz dos complementos algébricos de A.

Como estamos interessados na segunda coluna de A^{-1}, devemos calcular a segunda linha da matriz $\hat{A}$. Tem-se:

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{24} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

A segunda linha da matriz $\hat{A}$ é $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e, portanto, a segunda coluna de adj A é $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e a segunda coluna de A^{-1} é dada por : $-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 1/5 \\ -1/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}$.

c) Indique qual a segunda linha da matriz dos complementos algébricos de A.

Os alunos que calcularam a segunda coluna da inversa resolvendo o sistema, poderiam raciocinar do seguinte modo:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = \frac{1}{\det A} \hat{A}^T \Rightarrow \hat{A}^T = (\det A) A^{-1} \Rightarrow \hat{A} = (\det A)(A^{-1})^T.$$

Assim, a linha 2 da matriz dos complementos algébricos de A pode obter-se simplesmente multiplicando por $\det A$ a transposta da segunda coluna de A^{-1}, ou seja, essa linha é:

$$-5\begin{pmatrix} 3/5 & 1/5 & -1/5 & -1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Os outros alunos apenas teriam de dizer que essa linha já tinha sido calculada.