Álgebra Linear para Engenharia

Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática

Licenciatura em Engenharia Informática

Teste 1 - $\boxed{\text{D}}$

20 novembro 2021 Duração: 2h

Nome: ______________________ Número: ________

Grupo I

As respostas às questões deste grupo devem ser apresentadas no enunciado.

1. (3.5 val.) **Responda a esta questão nos espaços indicados, sem apresentar os seus cálculos.**

Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -6 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) O elemento na posição $(1,4)$ da matriz $2A^T B$ é: -12.

b) $\det A =$ 4 .

c) A característica da matriz B é: 2.

d) O complemento algébrico do elemento na posição $(2,3)$ da matriz A é: 8.

e) O elemento na posição $(3,2)$ da matriz A^{-1} é: 2.

Nas questões 2. a 5., indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando a opção conveniente. As respostas incorretamente assinaladas têm cotação negativa.

2. (2.0 val.) Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ -x + 2y = 0 \\ x + 4z = 2 \end{cases}.$$

	V	F
a) O conjunto das soluções do sistema homogéneo associado é $S = \{(-4\alpha, -2\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.	⊗	○
b) O sistema é possível e determinado e $(-2,-1,1)$ é a sua solução.	○	⊗
c) O sistema é possível e duplamente indeterminado e $(-2,-1,1)$ e $(2,1,0)$ são duas das suas soluções.	○	⊗
d) O sistema é possível e simplesmente indeterminado e $(-2,-1,1)$ é uma das suas soluções.	⊗	○

(continua)

3. (2.0 val.) Seja $A = (a_{ij})$ a matriz de ordem 3 definida por $a_{ij} = \begin{cases} i+j, & \text{se } i \leq j \\ 0, & \text{se } i > j \end{cases}$.

	V	F
a) A matriz A é equivalente por linhas à matriz $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.	$\otimes$	$\bigcirc$
b) A matriz A é invertível e a sua inversa é uma matriz triangular superior.	$\otimes$	$\bigcirc$
c) A matriz A é uma matriz anti-simétrica.	$\bigcirc$	$\otimes$
d) O sistema homogéneo $Ax = 0$ é possível e indeterminado.	$\bigcirc$	$\otimes$

4. (2.0 val.) Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} c & c+3d \\ a & a+3b \end{pmatrix}$, com a, b, c, d números reais tais que $ad - bc = 1$.

	V	F
a) A forma em escada reduzida da matriz A é I_2.	$\otimes$	$\bigcirc$
b) $\det B = 3$.	$\bigcirc$	$\otimes$
c) $\operatorname{car} A = 3 \operatorname{car} B$.	$\bigcirc$	$\otimes$
d) As matrizes A e B são invertíveis e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.	$\otimes$	$\bigcirc$

5. (3.0 val.)

	V	F
a) Se A é uma matriz quadrada de ordem 2 e $\det A = 4$, então $\det(3A^{-1}A^T) = 9$.	$\otimes$	$\bigcirc$
b) Se A e B são matrizes quadradas da mesma ordem e invertíveis, então $A + B$ é invertível.	$\bigcirc$	$\otimes$
c) Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Se o sistema homogéneo $Ax = 0$ tem apenas a solução nula, então o sistema $Ax = b$ tem sempre solução, seja qual for o vetor $b \in \mathbb{R}^n$.	$\otimes$	$\bigcirc$
d) Se A é uma matriz real 3×5 cuja característica é 2, então $\operatorname{car}(A^T) = 3$.	$\bigcirc$	$\otimes$

Grupo II

Responda às próximas duas questões numa folha de teste, apresentando os seus cálculos.

1. (5.5 val.) A matriz $A_{a,b} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 2 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & b & 0 & 1 \end{array}\right)$, $a, b \in \mathbb{R}$, é a matriz ampliada de um dado sistema.

a) Classifique esse sistema, em função dos parâmetro a e b, quanto à existência e unicidade de solução.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 2 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & b & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 2 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & b & -a & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - bL_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 2 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & -a(1+b) & -1-b \end{array}\right).$$

Então:

- Para $b = -1$, o sistema é possível e simplesmente indeterminado (seja qual for o valor de a);
- Para $b \neq -1$ e $a = 0$, o sistema é impossível;
- Para $b \neq -1$ e $a \neq 0$, o sistema é possível e determinado.

b) Resolva o sistema no(s) caso(s) em que for indeterminado.

Quando $b=-1$ o sistema é $\begin{cases} x+az=2 \\ y+az=1 \end{cases}$, sendo o seu conjunto solução $\{(2-az, 1-az, z),\ z\in\mathbb{R}\}$.

c) Seja B a matriz dos coeficientes do sistema, considerando $a=1$ e $b=0$. Justifique que a matriz B é invertível e calcule a terceira coluna de B^{-1}.

A matriz B é invertível, porque já foi visto na alínea anterior que car$(A_{1,0})=3$. Para calcular a 3ª coluna de B^{-1} basta resolver o sistema $B\mathbf{x}=\mathbf{e}_3$, onde $\mathbf{e}_3$ é a 3ª coluna de I_3. Como,

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right),$$

a coluna pretendida é $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Alternativamente, poder-se-ia calcular a 3ª coluna da matriz adjunta de B (calculando os complementos algébricos dos elementos da 3ª linha de B) e dividindo por det B $(=-1)$.

2. (2.0 val.) Resolva a seguinte equação: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2x \\ 1 & 1 & 2x & 1 \\ 1 & 2x & 1 & 1 \\ 2x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0.$

Substituindo a primeira linha (também poderia ser coluna) da matriz pela sua soma com as restantes e usando as propriedades dos determinantes obtém-se:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2x \\ 1 & 1 & 2x & 1 \\ 1 & 2x & 1 & 1 \\ 2x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+2x & 3+2x & 3+2x & 3+2x \\ 1 & 1 & 2x & 1 \\ 1 & 2x & 1 & 1 \\ 2x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3+2x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \\ 1 & 2x & 1 & 1 \\ 2x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (3+2x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2x-1 & 0 \\ 0 & 2x-1 & 0 & 0 \\ 0 & -2x+1 & -2x+1 & -2x+1 \end{vmatrix} = (3+2x)(2x-1)^3\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (3+2x)(2x-1)^3.$$

As soluções da equação são, por isso, $x=-\frac{3}{2}$ e $x=\frac{1}{2}$.

Alternativamente, poder-se-ia usar apenas o Método de eliminação de Gauss

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2x \\ 1 & 1 & 2x & 1 \\ 1 & 2x & 1 & 1 \\ 2x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2x-1 & 1-2x \\ 0 & 2x-1 & 0 & 1-2x \\ 0 & -2x+1 & -2x+1 & 1-4x^2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2x+1 & -2x+1 & 1-4x^2 \\ 0 & 2x-1 & 0 & 1-2x \\ 0 & 0 & 2x-1 & 1-2x \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2x+1 & -2x+1 & 1-4x^2 \\ 0 & 0 & -2x+1 & 2-2x-4x^2 \\ 0 & 0 & 2x-1 & 1-2x \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2x+1 & -2x+1 & 1-4x^2 \\ 0 & 0 & -2x+1 & 2-2x-4x^2 \\ 0 & 0 & 0 & 3-4x-4x^2 \end{vmatrix}$$

$$= (-2x+1)^2(4x^2+4x-3)$$