1º Teste de ÁLGEBRA LINEAR para a Engenharia

Licenciatura em Engenharia Informática/ Mestrado Integrado em Engenharia Informática

31 de outubro de 2022 Duração: **1h50m**

Nome : ______________________________ Nº __________ Curso __________

Relativamente às questões seguintes notar que nas suas respostas:

i) devem ser apresentados os cálculos essenciais e uma ***justificação*** *da resposta, nos espaços indicados.*

ii) a resolução de sistemas de equações lineares deve ser feita pelo método de Gauss, de Gauss- Jordan ou pela regra de Cramer;

iii) o cálculo de determinantes deve ser feito por aplicação do teorema de Laplace e/ou através da condensação de Gauss.

1. Sejam $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ e $M = [m_{ij}]_{3\times 4}$ tal que $m_{ij} = \begin{cases} i-2j & \text{se } i \geq j \\ j-i & \text{se } i < j \end{cases}$

   (a) Verifique se $(1, 0, 2, -1)$ e $3(5, 1, 1, 1)$ são soluções do sistema $AX = B$ e se $A = M$.

   (b) Classifique o sistema $AX = 0$ e diga se são soluções do sistema homogéneo $AX = 0$ os elementos do conjunto $C = \{\alpha(1, 0, 2, -1) - 3\beta(5, 1, 1, 1) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

2. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Verifique que A e B são matrizes invertíveis e calcule as respetivas inversas.

(b) Resolva a equação matricial $A\,X = (A+B)^2 - (A^2+B^2)$ cuja incógnita é a matriz X.

3. (a) Classifique e calcule o conjunto das soluções do seguinte sistema de quatro equações lineares, de coeficientes reais, nas incógnitas x, y, z e w:

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} -x & +y & +z & -3w & = & 0 \\ x & & -z & +4w & = & 1 \\ & -y & & +w & = & -1 \\ -x & +2y & +z & -2w & = & 1 \end{array}\right.$$

(b) Sendo A a matriz dos coeficientes do sistema, diga se existem duas matrizes coluna distintas, X_1 e X_2, tais que $AX_1 = AX_2$. Em caso afirmativo, dê um exemplo de matrizes X_1 e X_2 que verifiquem esta igualdade.

4. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 4/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule os determinantes: $|A|$ e $|2(B^T B)^3|$.

(b) Calcule $|A^3 C^{-1}|$. Diga, justificando, se a matriz $A^3 C^{-1}$ é invertível e se existe uma matriz X tal que $X^2 = A^3 C^{-1}$.

COTAÇÃO: cada alínea vale 2.5 valores .