## 1º Teste de ÁLGEBRA LINEAR para a Engenharia

Licenciatura em Engenharia Informática/ Mestrado Integrado em Engenharia Informática

31 de outubro de 2022 Duração: **1h50m**

~~Nome~~ : Proposta de correção Nº ______ Curso ______

*Relativamente às questões seguintes notar que nas suas respostas:*
*i) devem ser apresentados os cálculos essenciais e uma* ***justificação*** *da resposta, nos espaços indicados.*
*ii) a resolução de sistemas de equações lineares deve ser feita pelo método de Gauss, de Gauss- Jordan ou pela regra de Cramer;*
*iii) o cálculo de determinantes deve ser feito por aplicação do teorema de Laplace e/ou através da condensação de Gauss.*

1. Sejam $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ e $M = [m_{ij}]_{3\times 4}$ tal que $m_{ij} = \begin{cases} i-2j & \text{se } i \geq j \\ j-i & \text{se } i < j \end{cases}$

   (a) Verifique se $(1,0,2,-1)$ e $3(5,1,1,1)$ são soluções do sistema $AX = B$ e se $A = M$.

   (b) Classifique o sistema $AX = 0$ e diga se são soluções do sistema homogéneo $AX = 0$ os elementos do conjunto $C = \{\alpha(1,0,2,-1) - 3\beta(5,1,1,1) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

a) Fazendo a multiplicação de matrizes:

$$A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \quad e \quad A \cdot 3 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \cdot A \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Logo $(1,0,2,-1)$ e $3\cdot(5,1,1,1)$ são soluções de $AX=B$.

$$M = [m_{ij}]_{3\times 4} = \begin{bmatrix} -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -3 & \cdot \end{bmatrix}$$

Então $m_{33} = -3$ e $a_{33} = 1$. Consequentemente, $M \neq A$.

b) $AX=0$ admite a solução nula, $(0,0,0,0)$, logo é possível. Por outro lado $r(A) \leq 3$ (= nº linhas) $< 4$ (= nº colunas). Assim o sistema é possível e indeterminado.

Usando as propriedades da multiplicação de matrizes, temos

$$A \cdot \left(\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} - \beta \cdot 3 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \alpha A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} - \beta \cdot A \cdot 3 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \underset{a)}{=} \alpha B - \beta B$$

$$= (\alpha - \beta) B.$$

Então nem todos os elementos de $C$ são solução de $AX=0$. Só são soluções os elementos de $C$ em que $\alpha = \beta$.

2. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Verifique que $A$ e $B$ são matrizes invertíveis e calcule as respetivas inversas.

(b) Resolva a equação matricial $AX = (A+B)^2 - (A^2 + B^2)$ cuja incógnita é a matriz $X$.

a) A é uma matriz diagonal e os elementos da diagonal são não nulos. Então A é invertível e

$$A^{-1} = \mathrm{diag}(-1, 2, 1/2)^{-1} = \mathrm{diag}(-1, 1/2, 2).$$

$$[B \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

$r(B) = 3$, logo B é invertível. Continuando a condensação:

$$\xrightarrow[\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

Então $B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

b) $AX = (A+B)^2 - (A^2 + B^2) \iff AX = A^2 + AB + BA + B^2 - A^2 - B^2$

$\iff AX = AB + BA$

$\iff X = A^{-1}(AB + BA)$

$\iff X = B + A^{-1}BA$

$A^{-1}B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $A^{-1}BA = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1/2 \\ 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

Então

$$X = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1/2 \\ -1 & 0 & 5/4 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. (a) Classifique e calcule o conjunto das soluções do seguinte sistema de quatro equações lineares, de coeficientes reais, nas incógnitas $x$, $y$, $z$ e $w$:

$$\begin{cases} -x & +y & +z & -3w & = & 0 \\ x & & -z & +4w & = & 1 \\ & -y & & +w & = & -1 \\ -x & +2y & +z & -2w & = & 1 \end{cases}$$

(b) Sendo $A$ a matriz dos coeficientes do sistema, diga se existem duas matrizes coluna distintas, $X_1$ e $X_2$, tais que $AX_1 = AX_2$. Em caso afirmativo, dê um exemplo de matrizes $X_1$ e $X_2$ que verifiquem esta igualdade.

a) A matriz simples do sistema é $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - L_2]{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

O sistema é possível porque $r(A) = r(A \mid B)$ $(= 3)$ e é indeterminado porque $r(A) = 3 < 4 =$ nº incógnitas.

O sistema do enunciado é equivalente a

$$\begin{cases} -x + y + z - 3w = 0 \\ y + w = 1 \\ 2w = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z + 1 \\ y = 1 \\ w = 0 \end{cases}$$

O conjunto das soluçõ do sistema é $\{(a+1, 1, a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$.

b) Existem porque $r(A) <$ nº de incógnitas. Usando a alínea a), fazendo $a = 0$ obtém-se a soluç $(1, 1, 0, 0)$ e fazendo $a = 1$ obtém-se a soluç $(2, 1, 1, 0)$. Então

$$A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 4/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule os determinantes: $|A|$ e $|2(B^T B)^3|$.

(b) Calcule $|A^3 C^{-1}|$. Diga, justificando, se a matriz $A^3 C^{-1}$ é invertível e se existe uma matriz $X$ tal que $X^2 = A^3 C^{-1}$.

a) $\det A = \underset{\text{T. Laplace } 4^{\text{a}} \text{ linha}}{-2(-1)^{4+3}} \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=} 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} =$

$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{=} 2 \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 2 \cdot (1 \times 2 \times (-1)) = -4$

$\det(2(B^T B)^3) = \det\left(2 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^3\right) = 2^2 \cdot \left(\det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right)^3$

$= 4 \cdot (4-1)^3 = 4 \cdot 27 = 108$

b) $\det(A^3 C^{-1}) = \det A^3 \cdot \det C^{-1} = (\det A)^3 \cdot \dfrac{1}{\det C} =$

$= (-4)^3 \cdot \dfrac{1}{(-1) \times 2 \times 1 \times (-1/3)} = -4^3 \cdot \dfrac{3}{2} = -96$

Como $\det(A^3 C^{-1}) \neq 0$ então $A^3 C^{-1}$ é invertível.

Se existir uma matriz $X$ tal que $X^2 = A^3 C^{-1}$, então $X$ é uma matriz do tipo $4 \times 4$ e $\det X^2 = \det A^3 C^{-1}$.

Assim $(\det X)^2 = -96$ o que é impossível.

Logo não existe uma matriz $X$ nas condições do enunciado.

COTAÇÃO: cada alínea vale 2.5 valores .