# 1º Teste de ÁLGEBRA LINEAR para a Engenharia

Licenciatura em Engenharia Informática/ Mestrado Integrado em Engenharia Informática

9 de novembro de 2024 Duração: **2h**

Nome : ________________________________ Nº __________ Folha de continuação _____

1. **Nesta questão, responda a cada uma das alíneas apresentando apenas o resultado final no retângulo correspondente, sem justificação.**

Sejam $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Indique o valor de $[-2\,A\,C]_{3\,1}$

(b) Diga se existe uma matriz coluna $B$ tal que o sistema $A\,X = B$ é impossível e, em caso afirmativo, indique essa matriz.

(c) Indique os valores de $a$ e de $b$ tais que $D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & b & -2a \\ b & -\frac{1}{2} & b & \frac{a}{2} \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & b & 0 & a \end{bmatrix}$.

(d) Indique uma matriz $B$ tal que $(2,-1,1)$ é solução do sistema $F\,X = B$.

(e) Indique um vetor $v \in \mathbb{R}^3$ do tipo $v = (x,1,z)$ que é combinação linear dos vetores $(1,-1,3)$, $(2,0,2)$ e $(-1,-1,1)$.

**Atenção que relativamente a cada uma das questões seguintes têm de ser atendidos os seguintes aspetos:**

**i) devem ser apresentados os cálculos essenciais e uma justificação cuidadosa da resposta, nos espaços imediatamente a seguir;**

**ii) a resolução de sistemas de equações lineares só pode ser feita pelo método de Gauss, de Gauss-Jordan ou pela regra de Cramer;**

**iii) o cálculo do valor de determinantes deve ser feito por aplicação do teorema de Laplace e/ou por aplicação de transformações elementares.**

2. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Calcule $det(A)$. (b) (i) Resolva a equação matricial $A\,X^T - C = A\,C$ em ordem a $X$;

   (ii) calcule a tabela da matriz $X$.

3. (a) Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Calcule o conjunto das soluções do sistema $AX = B$.

(b) Diga se o vetor $(0, 1, 1, 1)$ pertence ao subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por $C = \{(1, 0, 2, 3),\ (0, 2, 2, 2),\ (1, 1, 2, 3)\}$.

4. Seja $A_k = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -k \\ k & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -k \end{bmatrix}$.

(a) Se existir, calcule um valor de $k$ e uma matriz coluna $B$ não nula tal que $A_k X = B$ é:
i. possivel e determinado; ii. possivel e indeterminado; iii. impossível.

(b) Seja $k = 1$. Determine um sistema de equações lineares cujo conjunto das soluções é o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $\{(1, 1, 2), (2, 0, 3), (-1, 1, -1)\}$.

COTAÇÃO: cada questão vale 5 valores .

# 1º Teste de ÁLGEBRA LINEAR para a Engenharia

Licenciatura em Engenharia Informática/ Mestrado Integrado em Engenharia Informática

9 de novembro de 2024 Duração: **2h**

Nome : ______________________________ Nº __________ Folha de continuação ______

1. **Nesta questão, responda a cada uma das alíneas apresentando apenas o resultado final no retângulo correspondente, sem justificação.**

Sejam $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Indique o valor de $[-2\,A\,C]_{1\,2}$

(b) Diga se existe uma matriz coluna $B = \begin{bmatrix} a \\ -1 \\ c \\ 3 \end{bmatrix}$, tal que o sistema $D\,X = B$ é possível e determinado. Em caso afirmativo, indique uma matriz $B$ nessas condições.

(c) Indique os valores de $a$ e de $b$ tais que $D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & b & 0 & -2/3 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & a & 1/3 \\ 0 & b-1 & 0 & \frac{a}{3} \end{bmatrix}$.

(d) Indique uma matriz $B$ tal que $(1,-1,2)$ é solução do sistema $F\,X = B$.

(e) Indique um vetor $v \in \mathbb{R}^3$ do tipo $v = (x, y, 2)$ que é combinação linear dos vetores $(1,-1,3)$, $(2,0,2)$ e $(-1,-1,1)$.

**Atenção que relativamente a cada uma das questões seguintes têm de ser atendidos os seguintes aspetos:**

**i) devem ser apresentados os cálculos essenciais e uma justificação cuidadosa da resposta, nos espaços imediatamente a seguir;**

**ii) a resolução de sistemas de equações lineares só pode ser feita pelo método de Gauss, de Gauss-Jordan ou pela regra de Cramer;**

**iii) o cálculo do valor de determinantes deve ser feito por aplicação do teorema de Laplace e/ou por aplicação de transformações elementares.**

2. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Calcule $det(A)$. (b) (i) Resolva a equação matricial $XA + C^T = -C^T A$ em ordem a $X$;
   (ii) calcule a tabela da matriz $X$.

3. (a) Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Calcule o conjunto das soluções do sistema $AX = B$.

(b) Diga se o vetor $(1, -1, 0, 1)$ pertence ao subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por $C = \{(1, 0, 2, 3),\ (0, 2, 2, 2),\ (0, 1, 1, 1)\}$.

4. Seja $A_t = \begin{bmatrix} t & 2 & -1 \\ 1 & 0 & t \\ 2 & 3 & -t \end{bmatrix}$.

(a) Se existir, calcule um valor de $t$ e uma matriz coluna $B$ não nula tal que $A_t X = B$ é:

i. possivel e determinado; ii. possivel e indeterminado; iii. impossível.

(b) Seja $t = 1$. Determine um sistema de equações lineares cujo conjunto das soluções é o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $\{(1,1,2),\,(2,0,3),\,(-1,1,-1)\}$.

COTAÇÃO: cada questão vale 5 valores .