1º Teste de ÁLGEBRA LINEAR para a Engenharia

Licenciatura em Engenharia Informática/ Mestrado Integrado em Engenharia Informática

9 de novembro de 2024 Duração: **2h**

Nome : ______________________________ Nº __________ Folha de continuação ______

1. **Nesta questão, responda a cada uma das alíneas apresentando apenas o resultado final no retângulo correspondente, sem justificação.**

Sejam $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ *e* $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) *Indique o valor de* $[-2\,A\,C]_{1\,2}$

$\boxed{-28}$

(b) *Diga se existe uma matriz coluna* $B = \begin{bmatrix} a \\ -1 \\ c \\ 3 \end{bmatrix}$, *tal que o sistema* $D\,X = B$ *é possível e determinado. Em caso afirmativo, indique uma matriz* B *nessas condições.*

Existe,

$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$.

$(\forall a, c \in \mathbb{R}\ )$

(c) *Indique os valores de* a *e de* b *tais que* $D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & b & 0 & -2/3 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & a & 1/3 \\ 0 & b-1 & 0 & \frac{a}{3} \end{bmatrix}$.

a= b=1

(d) *Indique uma matriz* B *tal que* $(1, -1, 2)$ *é solução do sistema* $F\,X = B$.

$\begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$

(e) *Indique um vetor* $v \in \mathbb{R}^3$ *do tipo* $v = (x, y, 2)$ *que é combinação linear dos vetores* $(1, -1, 3)$, $(2, 0, 2)$ *e* $(-1, -1, 1)$.

$(4, 1, 2)$

(em geral (x,y,2) tal que x=2y+2)

Atenção que relativamente a cada uma das questões seguintes têm de ser atendidos os seguintes aspetos:

i) devem ser apresentados os cálculos essenciais e uma *justificação* cuidadosa da resposta, nos espaços imediatamente a seguir;
ii) a resolução de sistemas de equações lineares só pode ser feita pelo *método de Gauss, de Gauss-Jordan ou pela regra de Cramer*;
iii) o cálculo do valor de determinantes deve ser feito por *aplicação do teorema de Laplace e/ou por aplicação de transformações elementares.*

2. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule $det(A)$. (b) (i) Resolva a equação matricial $XA + C^T = -C^T A$ em ordem a X;
(ii) calcule a tabela da matriz X.

(a) $$det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{=} det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{\text{T.Laplace} \\ 1^{\text{a}}\text{coluna}}}{=}$$

$$= -1(-1)^{1+1} det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{\text{T. Laplace} \\ 1^{\text{a}}\text{linha}}}{=} -\left(-1(-1)^{1+1} det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + 1(-1)^{2+1} det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= -(-1-1) = 2$$

(b) (i) Por (a) sabemos que $det\, A \neq 0$, pelo que A é invertível. Então,

$$X\, A + C^T = -C^T A \quad \Leftrightarrow \quad X = (-C^T A - C^T)A^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad X = -C^T - C^T A^{-1}$$

$(\Leftrightarrow \quad X = -C^T(I_4 + A^{-1}))$.

(ii) Comecemos por calcular A^{-1}.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_4 \leftarrow L_4 + 1/2 L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow 1/2\, L_3}}{\longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{array}\right]$$

Consequentemente,

$$X = -\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

3. (a) Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Calcule o conjunto das soluções do sistema $AX = B$.

(b) Diga se o vetor $(1,-1,0,1)$ pertence ao subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por $C = \{(1,0,2,3),\ (0,2,2,2),\ (0,1,1,1)\}$.

(a)
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$
$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Então

$$AX = B \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcr} x & & +z & & = 1 \\ & 2y & +z & +w & = -1 \\ & & -z & & = -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1-z \\ y & = & 1/2(-1-z-w) \\ z & = & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & -1-w/2 \\ z & = & 1 \end{array} \right. .$$

O conjuto das soluções do sistema é $\{(0,-1-a/2,1,a)\ :\ a \in \mathbb{R}\}$.
(alternativa: $\{(0,,a,1,-2-2a)\ :\ a \in \mathbb{R}\}$.)

(b) $(1,-1,0,1) \in \langle C \rangle$ sse $(1,-1,0,1)$ é combinação linear dos vetores de C, ou seja, sse o sistema $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ é possível.

De (a) sabemos que: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{\text{(condensação} \\ \text{de Gauss)}}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

Assim, conclui-se que o sistema é impossível, pelo que $(1,-1,0,1) \notin \langle C \rangle$.

ALTERNATIVA 1: Como $(0,2,2,2) = 2(0,1,1,1)$, então $\langle C \rangle = \langle (1,0,2,3),\ (0,1,1,1) \rangle$.

Assim, $(1,-1,0,1) \in \langle C \rangle$ sse $(1,-1,0,1)$ é combinação linear dos vetores $(1,0,2,3$ e $(0,1,1,1)$, ou seja, sse o sistema $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ é possível.

De (a) sabemos que: $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{\text{(condensação} \\ \text{de Gauss)}}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

Assim, conclui-se que o sistema é impossível, pelo que $(1,-1,0,1) \notin \langle C \rangle$.

ALTERNATIVA 2:

$\vdots$

De (a) sabemos que $r\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{array}\right] = r\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = 3$ e $r\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2.$

Assim, conclui-se que o sistema é impossível, pelo que $(1,-1,0,1) \notin \langle C \rangle$.

4. Seja $A_t = \begin{bmatrix} t & 2 & -1 \\ 1 & 0 & t \\ 2 & 3 & -t \end{bmatrix}$.

(a) Se existir, calcule um valor de t e uma matriz coluna B não nula tal que $A_tX = B$ é:
i. possivel e determinado; ii. possivel e indeterminado; iii. impossível.

(b) Seja $t = 1$. Determine um sistema de equações lineares cujo conjunto das soluções é o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $\{(1,1,2), (2,0,3), (-1,1,-1)\}$.

(a) Começamos por fazer a condensação da matriz A_k.

$$\begin{bmatrix} t & 2 & -1 \\ 1 & 0 & t \\ 2 & 3 & -t \end{bmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ t & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -t \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - tL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 2 & -1-t^2 \\ 0 & 3 & -3t \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow 1/2\, L_2 \\ L_3 \leftarrow 1/3\, L_3}}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & -1/2(1+t^2) \\ 0 & 1 & -t \end{bmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & -1/2\,(1+t^2) \\ 0 & 0 & -t + 1/2(1+t)^2 \end{bmatrix}.$$

Assim, se $-t+1/2(1+t)^2 \neq 0$, ou seja, se $t \neq 1$, então $r(A_k) = 3$ e, como o número de colunas de A_t é igual ao número de linhas, e é igual a 3, então o sistema $A_tX = B$ é possível e determinado qualquer que seja $B \in \mathbb{R}^{3\times 1}$. Caso contrário, ou seja, se $t = 1$, $r(A_1) = 2$ e, dependendo da matriz coluna B, o sistema pode ser possível e indeterminado ou impossível. Isto justifica as escolhas seguintes:

(i) $t = 2$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$;

(ii) $t = 1$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, porque, escolhendo $(1,0,0)$ como sendo uma solução do sistema $A_1X = B$, então $B = A_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, ou seja, B é a primeira coluna de A_1;

(iii) $t = 1$ e $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, porque, seguindo as transformações acima,

$$\left[\begin{array}{c|c} A_1 & \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \end{array}\right] \underset{\substack{\text{(condensação} \\ \text{de Gauss)}}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & -1 & (x-y)/2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-3x-y+2z}{6} \end{array}\right]$$

e B não satisfaz a igualdade $\frac{-3x-y+2z}{6} = 0$, que é equivalente a $-3x - y + 2z = 0$.

ALTERNATIVA: Antes de fazer as escolhas para (ii) e (iii), concluir que o sistema $A_1X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ é possível sse $\frac{-3x-y+2z}{6} = 0$, pois $\left[\begin{array}{c|c} A_1 & \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \end{array}\right] \underset{\substack{\text{condensação} \\ \text{de Gauss}}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & x \\ 0 & -1 & 1 & z-2x \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-3x-y+2z}{6} \end{array}\right]$.

Escolher B em (ii) de modo a que $-3x - y + 2z = 0$ e em (iii) de modo a que $-3x - y + 2z \neq 0$.

(b) $(x,y,z) \in \langle (1,1,2), (2,0,3), (-1,1-,1) \rangle$ sse o sistema $A_1X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ é possível. Segundo os cálculos efetuados em (a), temos que o sistema é possível sse $-3x - y + 2z = 0$. Assim,

$$\langle (1,1,2), (2,0,3), (-1,1,-1) \rangle = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; : -3x - y + 2z = 0\}$$

pelo que um sistema de equações lineares nas condições requeridas tem uma única equação e é

$$\{-3x - y + 2z = 0$$

COTAÇÃO: cada questão vale 5 valores .

1º Teste de ÁLGEBRA LINEAR para a Engenharia

Licenciatura em Engenharia Informática/ Mestrado Integrado em Engenharia Informática

9 de novembro de 2024 Duração: **2h**

Nome : ____________________ Nº __________ Folha de continuação ______

1. **Nesta questão, responda a cada uma das alíneas apresentando apenas o resultado final no retângulo correspondente, sem justificação.**

Sejam $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ *e* $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) *Indique o valor de* $[-2\,A\,C]_{3\,1}$

12

(b) *Diga se existe uma matriz coluna* B *tal que o sistema* $A\,X = B$ *é impossível e, em caso afirmativo, indique essa matriz.*

Não existe

(c) *Indique os valores de* a *e de* b *tais que* $D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & b & -2a \\ b & -\frac{1}{2} & b & \frac{a}{2} \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & b & 0 & a \end{bmatrix}$.

a=1/3 e b=0

(d) *Indique uma matriz* B *tal que* $(2,-1,1)$ *é solução do sistema* $F\,X = B$.

$\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$

(e) *Indique um vetor* $v \in \mathbb{R}^3$ *do tipo* $v = (x,1,z)$ *que é combinação linear dos vetores* $(1,-1,3)$, $(2,0,2)$ *e* $(-1,-1,1)$.

$(2,1,0)$

(em geral, (x,1,z) tal que $-x+z=-2$)

Atenção que relativamente a cada uma das questões seguintes têm de ser atendidos os seguintes aspetos:

i) devem ser apresentados os cálculos essenciais e uma *justificação* cuidadosa da resposta, nos espaços imediatamente a seguir;

ii) a resolução de sistemas de equações lineares só pode ser feita pelo *método de Gauss, de Gauss-Jordan ou pela regra de Cramer*;

iii) o cálculo do valor de determinantes deve ser feito por *aplicação do teorema de Laplace e/ou por aplicação de transformações elementares.*

2. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule $det(A)$. (b) (i) Resolva a equação matricial $A\,X^T - C = A\,C$ em ordem a X;
(ii) calcule a tabela da matriz X.

(a) $$det \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4+2L_1}{=} det \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underset{\substack{\text{T. Laplace} \\ 1^{\text{a}} \text{ coluna}}}{=} -1(-1)^{1+1} det \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{T. Laplace} \\ 3^{\text{a}} \text{ coluna}}}{=} -\left(1(-1)^{1+3} det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - 1(-1)^{3+3} det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = -(2-0) = -2$$

(b) (i) Por (a) sabemos que $det\,A \neq 0$, pelo que A é invertível. Então,

$$A\,X^T - C = A\,C \quad \Leftrightarrow \quad X^T = A^{-1}(A\,C + C) \quad \Leftrightarrow \quad X^T = C + A^{-1}C \quad \Leftrightarrow \quad X = (C + A^{-1}C)^T$$

$(\Leftrightarrow \quad X = C^T(I_4 + A^{-1})^T)$.

(ii) Comecemos por calcular A^{-1}.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4+2L_1]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3+L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4+2L_1}]{}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_4]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow 1/2\,L_3}]{}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2+L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1/2\,L_4}]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1+L_2]{}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2+L_3]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Assim,

$$X = \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right)^T = \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right)^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

3. (a) Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Calcule o conjunto das soluções do sistema $AX = B$.

(b) Diga se o vetor $(0,1,1,1)$ pertence ao subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por $C = \{(1,0,2,3),\ (0,2,2,2),\ (1,1,2,3)\}$.

(a) $$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right] \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right] \underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Então

$$AX = B \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lllll} x & & +z & & = 2 \\ & 2y & +z & +w & = -2 \\ & & -z & & = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} x & = & 2 - z \\ y & = & 1/2(-2 - z - w) \\ z & = & 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} x & = & 0 \\ y & = & -2 - w/2 \\ z & = & 2 \end{array}\right. .$$

O conjunto das soluções do sistema é $\{(0, -2 - a/2, 2, a)\ :\ a \in \mathbb{R}\}$.
(alternativa $\{((0, a, 2, -4 - 2a) : a \in \mathbb{R}\})$

(b) Temos que $(0,1,1,1) \in \langle C \rangle$ sse $(0,1,1,1)$ é combinação linear dos vetores de C. Neste caso podemos observar que $(0,1,1,1) = \frac{1}{2}(0,2,2,2)$, pelo que se concluiu que $(0,1,1,1) \in \langle C \rangle$.

– –

ALTERNATIVA 1:

Temos que $(0,1,1,1) \in \langle C \rangle$ sse $(0,1,1,1)$ é combinação linear dos vetores de C, ou seja, sse o sistema $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é possível.

De (a) sabemos que: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \underset{\text{Condensação de Gauss}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Assim, conclui-se que o sistema é possível, pelo que $(0,1,1,1) \in \langle C \rangle$.

– –

ALTERNATIVA 2:

$\vdots$

De (a) sabemos que:

$$r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 \quad \text{e} \quad r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3$$

Assim, conclui-se que o sistema é possível, pelo que $(0,1,1,1) \in \langle C \rangle$.

4. Seja $A_k = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -k \\ k & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -k \end{bmatrix}$.

(a) Se existir, calcule um valor de k e uma matriz coluna B não nula tal que $A_kX = B$ seja:
i. possivel e determinado; ii. possivel e indeterminado; iii. impossível.

(b) Seja $k = 1$. Determine um sistema de equações lineares cujo conjunto das soluções seja o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $\{(1, 1, 2), (2, 0, 3), (-1, 1, -1)\}$.

(a) Começamos por fazer a condensação da matriz A_k.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -k \\ k & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -k \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - kL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -k \\ 0 & -2k & 1+k^2 \\ 0 & -1 & k \end{bmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -k \\ 0 & -1 & k \\ 0 & -2k & 1+k^2 \end{bmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2kL_2}{\longrightarrow}$$
$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -k \\ 0 & -1 & k \\ 0 & 0 & 1-k^2 \end{bmatrix}.$$

Assim, se $1 - k^2 \neq 0$, então $r(A_k) = 3$ e, como o número de colunas de A_k é igual ao número de linhas, e é 3, o sistema $A_kX = B$ é possível e determinado qualquer que seja $B \in \mathbb{R}^{3\times 1}$. Caso contrário, ou seja, se $k = 1$ ou $k = -1$, $r(A_k) = 2$ e, dependendo da matriz coluna B, o sistema pode ser possível e indeterminado ou impossível. Isto justifica as escolhas seguintes:

(i) $k = 2$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$;

(ii) $k = 1$ e $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, porque, escolhendo $(1, 1, 1)$ como sendo uma solução do sistema $A_1X = B$, então $B = A_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, ou seja, B é a soma das colunas de A_1;

(iii) $k = 1$ e $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, porque, seguindo as transformações elementares efetuadas acima,

$$\left[\begin{array}{c|c} A_1 & \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \end{array}\right] \underset{\substack{\text{condensação} \\ \text{de Gauss}}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & x \\ 0 & -1 & 1 & z - 2x \\ 0 & 0 & 0 & 3x + y - 2z \end{array}\right]$$

e B foi escolhido de modo a que não satisfaça a igualdade $3x + y - 2z = 0$.

ALTERNATIVA: Antes de fazer as escolhas para (ii) e (iii), concluir que o sistema $A_1X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ é possível sse $3x + y - 2z = 0$, pois $\left[\begin{array}{c|c} A_1 & \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \end{array}\right] \underset{\substack{\text{condensação} \\ \text{de Gauss}}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & x \\ 0 & -1 & 1 & z - 2x \\ 0 & 0 & 0 & 3x + y - 2z \end{array}\right]$

Escolher B em (ii) de modo a que $3x + y - 2z = 0$ e em (iii) de modo a que $3x + y - 2z \neq 0$.

(b) $(x, y, z) \in \langle(1, 1, 2), (2, 0, 3), (-1, 1, -1)\rangle$ sse o sistema $A_1X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ é possível. Dos cálculos apresentados em (a), conclui-se que $\langle(1, 1, -2), (2, 0, -3), (-1, 1, 3)\rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x+y-2z = 0\}$, pelo que um sistema de equações lineares nas condições do enunciado tem uma única equação e é

$$\{3x + y - 2z = 0$$

.

COTAÇÃO: cada questão vale 5 valores .