

Nome do aluno: _____

Número: _____

Grupo I

Em cada uma das questões deste grupo, indique se cada uma das afirmações é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando a opção conveniente.

- | | V | F |
|--|--------------------------|--------------------------|
| 1. Para quaisquer matrizes reais A e B , se a matriz $A + B$ está definida, então a expressão $AB^T A$ define uma matriz. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2. Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, se as matrizes A e B são antissimétricas, então a matriz $AB + BA$ é simétrica. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3. Para quaisquer matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, se $\text{car}(A) = \text{car}(B) = 3$, então a matriz $A + B$ é invertível. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4. Para quaisquer matrizes invertíveis $A, B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, tem-se $((AB)^{-1})^2 = (B^{-1})^2(A^{-1})^2$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5. Existem matrizes $A \in \mathcal{M}_{5 \times 3}(\mathbb{R})$ e $b \in \mathcal{M}_{5 \times 1}(\mathbb{R})$ tais que o sistema $Ax = 0$ é possível determinado e o sistema $Ax = b$ é impossível. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6. Para quaisquer matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, se o sistema $Bx = 0_{2 \times 1}$ é determinado, então o sistema $ABx = 0_{2 \times 1}$ é determinado. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 7. Para qualquer espaço vetorial V sobre um corpo \mathbb{K} e para quaisquer $v_1, v_2, v_3 \in V$, se a sequência (v_1, v_2, v_3) é linearmente independente, então $(v_1, v_1 + v_2 + v_3, v_3)$ é linearmente independente. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 8. O conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial real \mathbb{R}^3 . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Grupo II

Resolva cada uma das questões deste grupo na folha de exame. Justifique as suas respostas.

1. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Justifique que a matriz A é invertível e determine uma matriz $X \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ tal que

$$2X - ((A^{-1})^T B)^T = I_3.$$

2. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares de coeficientes reais correspondente à equação matricial $A_\alpha x = b_\alpha$, onde

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 1 & \alpha - 1 & \alpha + 1 \\ -\alpha & \alpha & -9 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b_\alpha = \begin{bmatrix} -1 \\ \alpha \\ 2\alpha - 3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Discuta o sistema $A_\alpha x = b_\alpha$ em função do parâmetro α .
- (b) Considere $\alpha = 3$. Utilizando o método de eliminação de Gauss ou o método de eliminação de Gauss-Jordan, determine o conjunto de soluções do sistema $A_3 x = b_3$.
3. No espaço vetorial real \mathbb{R}^3 , considere os subespaços vetoriais

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y = 0\}, \quad G = \langle (3, 1, 0), (0, 0, 2), (6, 2, -10) \rangle,$$

$$H = \langle (1, 1, 0), (0, 1, 0) \rangle.$$

- (a) Mostre que $F = G$.
- (b) Determine uma base de $F + H$ e a dimensão de $F \cap H$.
- (c) Determine um subespaço U de \mathbb{R}^3 tal que $\mathbb{R}^3 = F \oplus U$.

Cotação - Grupo I: $8 \times 0, 75$.

Grupo II: 1.(2, 75); 2.(2, 75 + 1, 5); 2.(2, 0 + 3, 0 + 2, 0).