

Nome do aluno: \_\_\_\_\_ Número: \_\_\_\_\_

**Grupo I**

Em cada uma das questões deste grupo, indique se cada uma das afirmações é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando a opção conveniente.

V F

1. Para quaisquer matrizes reais  $A$  e  $B$ , se a matriz  $A + B$  está definida, então a expressão  $AB^T A$  define uma matriz.

Seja  $A$  uma matriz do tipo  $p \times q$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$ . Se a expressão  $A + B$  está definida, então a matriz  $B$  é do mesmo tipo da matriz  $A$ . Logo,  $B^T$  é uma matriz do tipo  $q \times p$ . Como o número de colunas da matriz  $A$  é igual ao número de linhas da matriz  $B^T$ , então o produto  $AB^T$  está definido. Considerando que  $AB^T$  é uma matriz do tipo  $p \times p$ , o número de colunas de  $AB^T$  é igual ao número de linhas de  $A$  e, portanto, a expressão  $AB^T A$  define uma matriz.

2. Para quaisquer  $n \in \mathbb{N}$  e  $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ , se as matrizes  $A$  e  $B$  são antissimétricas, então a matriz  $AB + BA$  é simétrica.

Se as matrizes  $A$  e  $B$  são antissimétricas, tem-se  $A^T = -A$  e  $B^T = -B$ . Então

$$\begin{aligned}(AB + BA)^T &= (AB)^T + (BA)^T = B^T A^T + A^T B^T \\ &= (-B)(-A) + (-A)(-B) = BA + AB = AB + BA.\end{aligned}$$

Logo a matriz  $AB + BA$  é simétrica, pois  $(AB + BA)^T = AB + BA$ .

3. Para quaisquer matrizes  $A, B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ , se  $\text{car}(A) = \text{car}(B) = 3$ , então a matriz  $A + B$  é invertível.

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Então  $\text{car}(A) = \text{car}(B) = 3$ , mas  $A + B = 0_{3 \times 3}$  não é invertível.

4. Para quaisquer matrizes invertíveis  $A, B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ , tem-se  $((AB)^{-1})^2 = (B^{-1})^2(A^{-1})^2$ .

Para quaisquer matrizes invertíveis  $A, B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ , tem-se  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ . Logo, para quaisquer matrizes invertíveis  $A, B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ ,  $((AB)^{-1})^2 = B^{-1}A^{-1}B^{-1}A^{-1}$ . Considerando que o produto de matrizes não é comutativo, nem sempre se tem  $B^{-1}A^{-1}B^{-1}A^{-1} = (B^{-1})^2(A^{-1})^2$ .

Por exemplo, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

tem-se

$$((AB)^{-1})^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (B^{-1})^2(A^{-1})^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Existem matrizes  $A \in \mathcal{M}_{5 \times 3}(\mathbb{R})$  e  $b \in \mathcal{M}_{5 \times 1}(\mathbb{R})$  tais que o sistema  $Ax = 0$  é possível determinado e o sistema  $Ax = b$  é impossível.

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Então o sistema  $Ax = 0$  é possível determinado e o sistema  $Ax = b$  é impossível.

6. Para quaisquer matrizes  $A, B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ , se o sistema  $Bx = 0_{2 \times 1}$  é   determinado, então o sistema  $ABx = 0_{2 \times 1}$  é determinado.

Se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

o sistema  $Bx = 0$  é possível determinado e o sistema  $ABx = 0$  é possível indeterminado.

7. Para qualquer espaço vetorial  $V$  sobre um corpo  $\mathbb{K}$  e para quaisquer  $v_1, v_2, v_3 \in V$ , se a sequência  $(v_1, v_2, v_3)$  é linearmente independente, então  $(v_1, v_1 + v_2 + v_3, v_3)$  é linearmente independente.

Admitamos que a sequência  $(v_1, v_2, v_3)$  é linearmente independente. Então, para quaisquer  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{K}$ ,

$$\begin{aligned} \alpha_1 v_1 + \alpha_2(v_1 + v_2 + v_3) + \alpha_3 v_3 = 0_V &\Rightarrow (\alpha_1 + \alpha_2)v_1 + \alpha_2 v_2 + (\alpha_2 + \alpha_3)v_3 = 0_V \\ &\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ &\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0. \end{aligned}$$

Logo, a sequência  $(v_1, v_1 + v_2 + v_3, v_3)$  é linearmente independente.

8. O conjunto  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}$  é um subespaço vetorial do espaço vetorial real  $\mathbb{R}^3$ .

Sejam  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}$ ,  $v = (1, 0, 0)$  e  $u = (0, 1, 0)$ . Então  $u, v \in W$ , mas  $u + v = (1, 1, 0) \notin W$ .

## Grupo II

Resolva cada uma das questões deste grupo na folha de exame. Justifique as suas respostas.

1. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Justifique que a matriz  $A$  é invertível e determine uma matriz  $X \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  tal que

$$2X - ((A^{-1})^T B)^T = I_3.$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz  $A$ , temos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{l_2 \rightarrow l_2 - 2l_1 \\ l_3 \rightarrow l_3 - 2l_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U.$$

A matriz  $U$  é uma matriz em escada com linhas 3 não nulas e equivalente por linhas à matriz  $A$ , logo  $\text{car}(A) = 3$ . Como  $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  e  $\text{car}(A) = 3$ , então  $A$  é invertível.

No sentido de determinarmos a inversa de  $A$ , aplicamos o método de eliminação de Gauss à matriz  $[A|I_3]$

$$\begin{aligned} [A|I_3] &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{l_2 \rightarrow l_2 - 2l_1 \\ l_3 \rightarrow l_3 - 2l_1}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{l_2 \rightarrow l_2 - l_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{l_1 \rightarrow l_1 + l_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{l_2 \rightarrow -l_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Dos cálculos anteriores concluímos que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então

$$\begin{aligned} 2X - ((A^{-1})^T B)^T &= I_3 \Leftrightarrow 2X - B^T A^{-1} = I_3 \Leftrightarrow 2X = I_3 + B^T A^{-1} \\ \Leftrightarrow 2X &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow 2X &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow 2X &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$ , considere o sistema de equações lineares de coeficientes reais correspondente à equação matricial  $A_\alpha x = b_\alpha$ , onde

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 1 & \alpha - 1 & \alpha + 1 \\ -\alpha & \alpha & -9 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b_\alpha = \begin{bmatrix} -1 \\ \alpha \\ 2\alpha - 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Discuta o sistema  $A_\alpha x = b_\alpha$  em função do parâmetro  $\alpha$ .

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz  $[A_\alpha|b_\alpha]$ , temos

$$[A_\alpha|b_\alpha] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \alpha & -1 \\ 1 & \alpha-1 & \alpha+1 & \alpha \\ -\alpha & \alpha & -9 & 2\alpha-3 \end{array} \right] \xrightarrow[l_3 \rightarrow l_3 + \alpha l_1]{l_2 \rightarrow l_2 - l_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \alpha & -1 \\ 0 & \alpha & 1 & \alpha+1 \\ 0 & 0 & \alpha^2-9 & \alpha-3 \end{array} \right] = [U_\alpha|c_\alpha].$$

O sistema  $A_\alpha x = b_\alpha$  é:

- possível se e só se  $\text{car}(A_\alpha) = \text{car}([A_\alpha|b_\alpha])$ ;
- possível determinado se e só se  $\text{car}(A_\alpha) = \text{car}([A_\alpha|b_\alpha]) = 3 = n^0$  incógnitas;
- possível indeterminado se e só se  $\text{car}(A_\alpha) = \text{car}([A_\alpha|b_\alpha]) < 3 = n^0$  incógnitas.

Então, considerando a matriz em escada  $[U_\alpha|c_\alpha]$  (equivalente por linhas à matriz  $[A_\alpha|b_\alpha]$ ), concluímos que o sistema  $A_\alpha x = b_\alpha$  é:

- impossível, para qualquer  $\alpha \in \{0, -3\}$ ;
- possível determinado, para qualquer  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, -3, 3\}$ ;
- possível indeterminado, para  $\alpha = 3$ .

(b) Considere  $\alpha = 3$ . Utilizando o método de eliminação de Gauss ou o método de eliminação de Gauss-Jordan, determine o conjunto de soluções do sistema  $A_3 x = b_3$ .

Considerando  $\alpha = 3$  e os cálculos da alínea anterior, concluímos que a matriz  $[A_3|b_3]$  é equivalente por linhas à matriz

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Então o sistema  $A_3 x = b_3$  é equivalente a

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 3x_2 + x_3 = 4 \end{cases},$$

donde obtemos

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} - \frac{7}{3}x_3 \\ x_2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_3 \end{cases}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \text{Sol}_{(A_3 x = b_3)} &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = \frac{1}{3} - \frac{7}{3}c, b = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}c, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\frac{1}{3} - \frac{7}{3}c, \frac{4}{3} - \frac{1}{3}c, c) \in \mathbb{R}^3 \mid c \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

3. No espaço vetorial real  $\mathbb{R}^3$ , considere os subespaços vetoriais

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y = 0\}, \quad G = \langle (3, 1, 0), (0, 0, 2), (6, 2, -10) \rangle,$$

$$H = \langle (1, 1, 0), (0, 1, 0) \rangle.$$

(a) Mostre que  $F = G$ .

Temos

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 3y\} \\ &= \{(3y, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(3, 1, 0) + z(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (3, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle. \end{aligned}$$

Então, como  $(0, 0, 2) = \alpha(3, 1, 0) + \beta(0, 0, 1)$  com  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 2$  e  $\beta \neq 0$ , segue que

$$\langle (3, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle = \langle (3, 1, 0), (0, 0, 2) \rangle.$$

Por último, atendendo a que  $(6, 2, -10) = 2(3, 1, 0) - 5(0, 0, 2)$ , concluímos que

$$\langle (3, 1, 0), (0, 0, 2) \rangle = \langle (3, 1, 0), (0, 0, 2), (6, 2, -10) \rangle.$$

Portanto,  $F = G$ .

- (b) Determine uma base de  $F + H$  e a dimensão de  $F \cap H$ .

Da alínea anterior, sabe-se que  $F = \langle (3, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$ . Logo

$$F + H = \langle (3, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 0) \rangle.$$

Como  $(3, 1, 0) = 0(0, 0, 1) + 3(1, 1, 0) - 2(0, 1, 0)$ , então

$$F + H = \langle (0, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 0) \rangle.$$

A sequência  $((0, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 0))$  é linearmente independente, pois, para quaisquer  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ,

$$\alpha(0, 0, 1) + \beta(1, 1, 0) + \gamma(0, 1, 0) = (0, 0, 0) \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Portanto,  $((0, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 0))$  é uma base de  $F + G$ .

No sentido de determinar  $\dim F \cap H$ , comecemos por determinar  $\dim F$  e  $\dim H$ .

Como  $F = \langle (3, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$  e a sequência  $((3, 1, 0), (0, 0, 1))$  é linearmente independente, pois, para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,

$$\alpha(3, 1, 0) + \beta(0, 0, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0,$$

então  $((3, 1, 0), (0, 0, 1))$  é uma base de  $F$  e, portanto,  $\dim F = 2$ .

Relativamente a  $H$ , também temos  $\dim H = 2$ , pois  $H = \langle (1, 1, 0), (0, 1, 0) \rangle$  e a sequência  $((1, 1, 0), (0, 1, 0))$  é linearmente independente, uma vez que, para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,

$$\alpha(1, 1, 0) + \beta(0, 1, 0) = (0, 0, 0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Logo  $((1, 1, 0), (0, 1, 0))$  é uma base de  $H$ .

Então, como  $\dim(F + H) = \dim F + \dim H - \dim F \cap H$ ,  $\dim F = \dim H = 2$  e  $\dim F + H = 3$  (vimos anteriormente que uma base de  $F + H$  tem 3 vetores), concluímos que  $\dim F \cap H = 1$ .

- (c) Determine um subespaço  $U$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que  $\mathbb{R}^3 = F \oplus U$ .

Pretendemos determinar um subespaço  $U$  de  $\mathbb{R}^3$  que seja um suplementar de  $F$  relativamente a  $\mathbb{R}^3$ , ou seja, tal que  $F + U = \mathbb{R}^3$  e  $F \cap U = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ .

Da alínea (a) sabe-se que  $F = \langle (3, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$ . Então, como  $((3, 1, 0), (0, 0, 1))$  é linearmente independente,  $((3, 1, 0), (0, 0, 1))$  é uma base de  $F$ . Sejam  $u_1 = (3, 1, 0)$ ,  $u_2 = (0, 0, 1)$  e  $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$  a base canónica de  $\mathbb{R}^3$ . Considerando que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $\mathbb{R}^3$ , tem-se  $\mathbb{R}^3 = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$ , isto é,

$$\mathbb{R}^3 = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0), u_2 \rangle.$$

Considerando que  $u_1 = 3(1, 0, 0) + 1.u_2 + 0(0, 0, 1)$  e  $3 \neq 0$ , segue que

$$\mathbb{R}^3 = \langle u_1, (0, 1, 0), u_2 \rangle.$$

Uma vez que  $\dim \mathbb{R}^3 = 3$  e  $\mathbb{R}^3 = \langle u_1, (0, 1, 0), u_2 \rangle$ , a sequência  $(u_1, (0, 1, 0), u_2)$  é uma base de  $\mathbb{R}^3$ . Logo, sendo  $U = \langle (0, 1, 0) \rangle$ , tem-se  $F + U = \mathbb{R}^3$  e  $F \cap U = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ .

Cotação - Grupo I:  $8 \times 0,75$ .

Grupo II: 1.(2,75); 2.(2,75 + 1,5); 2.(2,0 + 3,0 + 2,0).