2º Teste de ÁLGEBRA LINEAR para a Engenharia

Licenciatura em Engenharia Informática/ Mestrado Integrado em Engenharia Informática

13 de dezembro de 2023 Duração: **2h**

~~Nome~~ : ____________________ Nº ________ Curso ________

1. Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$. Sem justificar, responda às questões seguintes.

   (a) Indique um vetor v tal que $\big(\mathrm{v}, (1,-1,3), (0,1,2)\big)$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Considere o espaço vetorial $\mathcal{S} = \langle (1,1,2,1), (0,1,2,1), (-1,0,0,3), (0,0,0,3), (-1,1,2,4) \rangle$. Indique uma base e *dim* $\mathcal{S}$.

   (c) Sendo A uma matriz de tipo 3×3 e sabendo que as matrizes $A+I_3$ e $A+3I_3$ não são invertíveis, indique um valor próprio de A.

   (d) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Indique $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que λ é um valor próprio e $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um vetor próprio associado λ.

2. A matriz em forma de escada reduzida por linhas obtida por aplicação da condensação de Gauss-Jordan à matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ é a matriz $A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 8/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$. Sem efetuar mais cálculos diga se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa, justificando.

   (a) a sequência $\big((1,0,2), (-2,3,-1), (0,3,3)\big)$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) o espaço $\mathcal{S} = \langle (1,0,2), (-2,3,-1), (0,3,3), (-1,1,0), (0,3,-2) \rangle$ tem dimensão 3.

(c) $(1,-2,0,-1,0)$, $(0,3,3,1,3)$ e $(2,-1,3,0,-2)$ não são linearmente independentes.

(d) Existe uma aplicação linear $f:\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathcal{M}(f;B_5,B_3)=A$ e $\text{Nuc}f=\{(0,0,0,0,0)\}$ (B_5 e B_3 são as bases canónicas de $\mathbb{R}^5$ e $\mathbb{R}^3$ respetivamente).

3. Sejam B_c a base canónica de $\mathbb{R}^4$ e B a base de $\mathbb{R}^3$ definida por $B=((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$.
Sejam $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$, $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ e $h:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ as transformações lineares tais que $f(a,b,c,d)=(a-b,2b,3a-c+d)$ para todo $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$,

$$M(g,B,B_c)=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M(h,B_c,B)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Sem justificar, indique:

(a) dois vetores que pertençam a $\text{Nuc}f$:

(b) $g(2,0,-3)$:

(c) as colunas em falta na matriz $M(f;B_c,B)$:

(d) $M(h\circ g;B,B)$:

4. No espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$, considere os subespaços vetoriais

$$\mathcal{F} = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - 3y = 0\}, \qquad \mathcal{H} = \langle (1,0,1,0),\ (0,1,2,0),\ (0,0,0,1) \rangle, \quad \text{e,}$$

para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $\qquad \mathcal{G}_\alpha =< (3,1,0,0), (0,0,2,1), (3,1,-10,-5), (0,0,\alpha-1,2) > .$

(a) Determine $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que $\dim \mathcal{G}_\alpha = 2$. Justifique a sua resposta e apresente os cálculos efetuados.

(b) Considere $\alpha = 1$. Justifique que $\mathcal{F} = \mathcal{G}_1$.

(c) Calcule $dim(\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{H})$. Justifique e apresente os cálculos efetuados.

5. Considere o seguinte subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$: $\mathcal{S} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+w = y+z+w = x-z = 0\}$.

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ a aplicação linear definida por $\mathcal{M}(\varphi; B_4, B_4) = A$, onde B_4 é a base canónica de $\mathbb{R}^4$. Justificando responda a cada uma das alíneas seguintes.

(a) Calcule a forma geral de um vetor do subespaço vetorial $\varphi(\mathcal{S})$.

(b) Calcule $\varphi(1, 1, -1, 0)$ e indique um vetor próprio da matriz A e um da matriz A^2.