$2^{\underline{o}}$ Teste de ÁLGEBRA LINEAR para a Engenharia

Licenciatura em Engenharia Informática/ Mestrado Integrado em Engenharia Informática

13 de dezembro de 2023 Duração: **2h**

~~Nome~~ : uma resolução do teste Nº ________ Curso ________

1. Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$. Sem justificar, responda às questões seguintes.

   (a) Indique um vetor v tal que $\big(\mathrm{v},(1,-1,3),(0,1,2)\big)$ é uma base de $\mathbb{R}^3$. $\boxed{(1,0,0)}$

   (b) Considere o espaço vetorial $\mathcal{S}=\langle(1,1,2,1),(0,1,2,1),(-1,0,0,3),(0,0,0,3),(-1,1,2,4)\rangle$. Indique uma base e *dim* $\mathcal{S}$. $\boxed{((1,1,2,1),(0,1,2,1),(-1,0,0,3))\ ;\ \dim S = 3.}$

   (c) Sendo A uma matriz de tipo 3×3 e sabendo que as matrizes $A+I_3$ e $A+3I_3$ não são invertíveis, indique um valor próprio de A. $\boxed{-1}$

   (d) Seja $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$. Indique $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que λ é um valor próprio e $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ é um vetor próprio associado λ. $\boxed{2}$

2. A matriz em forma de escada reduzida por linhas obtida por aplicação da condensação de Gauss-Jordan à matriz $A=\begin{bmatrix}1&-2&0&-1&0\\0&3&3&1&3\\2&-1&3&0&-2\end{bmatrix}$ é a matriz $A'=\begin{bmatrix}1&0&2&0&1/3\\0&1&1&0&8/3\\0&0&0&1&-5\end{bmatrix}$. Sem efetuar mais cálculos diga se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa, justificando.

   (a) a sequência $((1,0,2),(-2,3,-1),(0,3,3))$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

   As coordenadas dos 3 vetores da sequência correspondem às 3 primeiras colunas de A. Observando as 3 primeiras colunas de A' podemos dizer que $r\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&3&3\\2&-1&3\end{bmatrix}=2$, pelo que os 3 vetores não são linearmente independentes. A afirmação é falsa.

   (b) o espaço $\mathcal{S}=\langle(1,0,2),(-2,3,-1),(0,3,3),(-1,1,0),(0,3,-2)\rangle$ tem dimensão 3.

   $\dim S = r(A) = r(A') = 3$. Logo a afirmação é verdadeira

(c) $(1,-2,0,-1,0)$, $(0,3,3,1,3)$ e $(2,-1,3,0,-2)$ não são linearmente independentes.

$r(A) = r(A') = 3$. Sendo A do tipo 3×5, as 3 linhas de A são linearmente independentes. As coordenadas dos 3 vetores referidos na frase correspondem às 3 linhas de A. Logo a afirmação é falsa.

(d) Existe uma aplicação linear $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathcal{M}(f; B_5, B_3) = A$ e $\text{Nuc}f = \{(0,0,0,0,0)\}$ (B_5 e B_3 são as bases canónicas de $\mathbb{R}^5$ e $\mathbb{R}^3$ respetivamente).

$\text{Nuc}f = \{(x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid \mathcal{M}(f; B_5, B_3) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}$. Como $r(A) = 3$ o sistema $AX = 0$ é possível e indeterminado, pelo que Nucf contém vetores não nulos ($\dim \text{Nuc}f \geq 1$). Logo a afirmação é falsa.

3. Sejam B_c a base canónica de $\mathbb{R}^4$ e B a base de $\mathbb{R}^3$ definida por $B = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$.
Sejam $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ e $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ as transformações lineares tais que $f(a,b,c,d) = (a-b, 2b, 3a-c+d)$ para todo $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$,

$$M(g,B,B_c) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M(h,B_c,B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Sem justificar, indique:

(a) dois vetores que pertençam a $\text{Nuc}f$: $(0,0,0,0)$ e $(0,0,1,1)$

(b) $g(2,0,-3)$: $(7,-12,5,-7)$

(c) as colunas em falta na matriz $M(f;B_c,B)$:

$$M(f;B_c,B) = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(d) $M(h \circ g; B, B)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

COTAÇÃO: cada alínea desta três questões vale ...

4. No espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$, considere os subespaços vetoriais

$$\mathcal{F} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - 3y = 0\}, \qquad \mathcal{H} = \langle (1,0,1,0),\ (0,1,2,0),\ (0,0,0,1) \rangle, \quad \text{e},$$

para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $\qquad \mathcal{G}_\alpha = < (3,1,0,0), (0,0,2,1), (3,1,-10,-5), (0,0,\alpha-1,2) >.$

(a) Determine $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que $\dim \mathcal{G}_\alpha = 2$. Justifique a sua resposta e apresente os cálculos efetuados.

(b) Considere $\alpha = 1$. Justifique que $\mathcal{F} = \mathcal{G}_1$.

(c) Calcule $dim(\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{H})$. Justifique e apresente os cálculos efetuados.

a) $\dim G_\alpha = r \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -10 & \alpha-1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{2}L_3}}{=} r \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -10 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \cdots = r \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -10 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Entaõ $\dim G_\alpha = 2$, sse $\alpha - 3 = 0$, ou seja, sse $\alpha = 3$.
(Caso contrário $\dim G_\alpha = 3$.)

b) $G_1 = \langle (3,1,0,0), (0,0,2,1), (3,1,-10,-5), (0,0,0,2) \rangle$, pelo que G_1 é gerado por 4 vetores que verificam a condição $x - 3y = 0$ (onde x é a 1ª coordenada e y a 2ª). Logo $G_1 \subseteq F$ e $3 \underset{a)}{=} \dim G_1 \leq \dim F$. (1)

$\dim F = \dim \{(3y, y, z, w) \,|\, y, z, w \in \mathbb{R}\} = \dim \langle (3,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1) \rangle$

Entaõ $\dim F \leq 3$. (2)

De (1) e (2) resulta que $\dim F = \dim G_1 = 3$. Como $G_1 \subseteq F$, conclui-se que $F = G_1$.

c) $H = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \,|\, \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \ \ \alpha_1(1,0,1,0) + \alpha_2(0,1,2,0) + \alpha_3(0,0,0,1) = (a,b,c,d)\}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 1 & 2 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c-a-2b \\ 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_4]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & c-a-2b \end{array}\right]$

Logo $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ é possível se e só se $c = a + 2b$, pelo que

$H = \{(a, b, a+2b, d) \,|\, a, b, d \in \mathbb{R}\}$

Entaõ $G_1 \cap H = F \cap H = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x = 3y,\ z = x + 2y\}$

$= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x = 3y,\ z = 5y\} = \{(3y, y, 5y, w) \,|\, y, w \in \mathbb{R}\}$

$= \langle (3,1,5,0), (0,0,0,1) \rangle$

Assim, $((3,1,5,0), (0,0,0,1))$ é uma base de $G_1 \cap H$ porque os dois vetores geram $G_1 \cap H$ e são linearmente independentes pois $r \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$.

Logo $\dim(G_1 \cap H) = 2$ = nº vetores de uma base de $G_1 \cap H$

5. Considere o seguinte subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$: $\mathcal{S} = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+w = y+z+w = x-z = 0\}$.

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ a aplicação linear definida por $\mathcal{M}(\varphi; B_4, B_4) = A$, onde B_4 é a base canónica de $\mathbb{R}^4$. Justificando responda a cada uma das alíneas seguintes.

(a) Calcule a forma geral de um vetor do subespaço vetorial $\varphi(\mathcal{S})$.

(b) Calcule $\varphi(1,1,-1,0)$ e indique um vetor próprio da matriz A e um da matriz A^2.

a) Começamos por resolver o sistema $\begin{cases} x+y+w=0 \\ y+z+w=0 \\ x-z=0 \end{cases}$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_2]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - L_2]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Então $S = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x-z=0,\ y+z+w=0\} = \{(z, -z-w, z, w) \mid z,w \in \mathbb{R}\}$

e $\varphi(S) = \{\varphi(z,-z-w,z,w) \mid z,w \in \mathbb{R}\} = \{(2z-w, w, 2z+w, w) \mid z,w \in \mathbb{R}\}$

porque $\mathcal{M}(\varphi; B_4, B_4) \cdot \begin{bmatrix} z \\ -z-w \\ z \\ w \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} z \\ -z-w \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2z-w \\ w \\ 2z+w \\ w \end{bmatrix}$.

O sistema $\begin{cases} 2z-w = a \\ w = b \\ 2z+w = c \\ w = d \end{cases}$ é possível se e só se $b=d$ e $c=a+2b$

pois: $$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & b \\ 2 & 1 & c \\ 0 & 1 & d \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2}]{} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 2 & c-a \\ 0 & 0 & -b+d \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c-a-2b \\ 0 & 0 & d-b \end{array}\right].$$

Consequentemente, $\varphi(S) = \{(a,b,a+2b,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$. A forma geral dos vetores de $\varphi(S)$ é $(a,b,a+2b,b)$ com $a,b \in \mathbb{R}$.

b) $\mathcal{M}(\varphi; B_4, B_4) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, pelo que $\varphi(1,1,-1,0) = (0,0,0,0)$

e $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ é um vetor próprio de A (associado ao valor próprio 0)

$A^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = A \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Logo $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ é vetor próprio de A^2 (associado ao valor próprio 0).

COTAÇÃO: cada alínea destas duas últim

Respostas alternativas / justificação da resposta às questões 1, 3 e 5.

1 a)

$$r\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ -1 & 1 & y \\ 3 & 2 & z \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow -3L_1 + L_3}}{=} r\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 2 & z-3x \end{bmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{=} r\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & -5x-2y+z \end{bmatrix}$$

Logo $v = (x, y, z)$ não é combinação linear de $(1,-1,3)$ e $(0,1,2)$ sse $-5x-2y+z \neq 0$. Então v pode ser um qualquer vetor nestas condições.

1 b) Quaisquer 3 vetores de S linearmente independentes formam uma base de S.

1 c) -3

3 a) $f(a,b,c,d) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} a-b = 0 \\ 2b = 0 \\ 3a - c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0 \\ c = d \end{cases}$

A resposta certa seria dois vetores do tipo $(0,0,c,c)$ com $c \in \mathbb{R}$.

3 b) $(2,0,-3) = 2(1,0,0) + 3(1,1,0) - 3(1,1,1)$

$$\mathcal{M}(g; B, B_c) \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -12 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}$$

3 c) $\vdots$

$f(0,0,1,0) = (0,0,-1) = 0(1,0,0) + 1(1,1,0) - 1(1,1,1)$

$f(0,0,0,1) = (0,0,1) = 0(1,0,0) - 1(1,1,0) + 1(1,1,1)$

d) $\mathcal{M}(h \circ g; B, B) = \mathcal{M}(h; B_c, B) \cdot \mathcal{M}(g; B, B_c)$

5 b) Como A tem 2 linhas iguais, então $\det A = 0$ e $\det A^2 = (\det A$

Assim, 0 é valor próprio de A e de A^2. Determinando um vetor próprio de A, i.é, uma solução não nula de $AX=0$ obtém-se um vetor próprio de A.