# $2^{\underline{o}}$ Teste de ÁLGEBRA LINEAR para a Engenharia

Licenciatura em Engenharia Informática/ Mestrado Integrado em Engenharia Informática

13 de dezembro de 2023 Duração: **2h**

~~Nome~~ : ____________________ Nº __________ Curso __________

1. Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$. Sem justificar, responda às questões seguintes.

   (a) Identifique as condições sobre os escalares $\alpha$ e $\beta$ que garantem que o vetor $(\alpha, \beta, 3)$ é combinação linear de $(1,1,0)$, $(2,1,-1)$ e $(1,0,-1)$.

   (b) Considere o espaço vetorial $\mathcal{S} = \langle (1,1,2,2), (0,1,2,2), (0,0,0,1), (-2,0,0,3), (-1,1,2,0) \rangle$. Indique uma base e $dim\ \mathcal{S}$.

   (c) Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear tal que, para certa base $B$ de $\mathbb{R}^3$, $|\mathcal{M}(f; B, B)| = 3$. Indique $dim\,\mathrm{Nuc}\, f$.

   (d) Sendo $A$ uma matriz de tipo $3\times 3$ e sabendo que as matrizes $A - I_3$ e $A - 3I_3$ não são invertíveis, indique um valor próprio de $A$.

2. A matriz em forma de escada reduzida por linhas obtida por aplicação da condensação de Gauss-Jordan à matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ é a matriz $A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 8/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$. Sem efetuar mais cálculos diga se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa, justificando.

   (a) a sequência $\big((1,0,2), (-2,3,-1), (-1,1,0)\big)$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) o espaço $\mathcal{S} = \langle (1,0,2), (-2,3,-1), (-1,1,0), (0,3,3), (0,3,-2) \rangle$ tem dimensão 3.

(c) $(1,-2,-1,0,0)$, $(0,3,1,3,3)$ e $(2,-1,0,3,-2)$ são linearmente independentes.

(d) Existe uma única aplicação linear $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathcal{M}(f; B_5, B_3) = A$ e $\text{Nuc}\, f \neq \{(0,0,0,0,0)\}$ ($B_5$ e $B_3$ são as bases canónicas de $\mathbb{R}^5$ e $\mathbb{R}^3$ respetivamente).

3. Sejam $B_4$ e $B_3$ as bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ e de $\mathbb{R}^3$, respetivamente, e $B = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Sejam $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ e $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ as transformações lineares tais que

$$M(g, B, B_4) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M(h, B_4, B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

e, para todo $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, $f(a,b,c,d) = (a-b, 2b, 3a-c+d)$. Sem justificar, indique:

(a) uma base para $\text{Im} f$:

(b) $g(2,-3,0)$:

(c) as colunas em falta na matriz $M(h; B_4, B_3)$:

$$M(h; B_4, B_3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & & \\ 1 & 0 & & \\ 1 & 1 & & \end{bmatrix}$$

(d) $M(f \circ g; B, B_3)$:

COTAÇÃO: cada alínea destas três questões vale 1 val

4. No espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$, considere os subespaços vetoriais

$$\mathcal{F} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - 3y = 0\}, \qquad \mathcal{H} = \langle (1,0,1,0),\ (0,1,2,0),\ (0,0,0,1) \rangle, \quad \text{e,}$$

para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $\qquad \mathcal{G}_\alpha =< (3,1,0,0), (0,0,2,1), (6,2,-10,-5), (-3,-1,\alpha-1,2) > .$

(a) Determine $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que $\dim \mathcal{G}_\alpha = 2$. Justifique a sua resposta e apresente os cálculos efetuados.

(b) Considere $\alpha = 3$. Justifique que $\mathcal{F} = \mathcal{G}_3$.

(c) Calcule uma base de $\mathcal{F} \cap \mathcal{H}$. Justifique e apresente os cálculos efetuados.

4. No espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$, considere os subespaços vetoriais

$$\mathcal{F} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 3y = 0\}, \qquad \mathcal{H} = \langle (1,0,1,0),\ (0,1,2,0),\ (0,0,0,1) \rangle, \quad \text{e},$$

para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $\qquad \mathcal{G}_\alpha = < (3,1,0,0), (0,0,2,1), (6,2,-10,-5), (-3,-1,\alpha-1,2) >$ .

(a) Determine $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que $\dim \mathcal{G}_\alpha = 2$. Justifique a sua resposta e apresente os cálculos efetuados.

(b) Considere $\alpha = 3$. Justifique que $\mathcal{F} = \mathcal{G}_3$.

(c) Calcule uma base de $\mathcal{F} \cap \mathcal{H}$. Justifique e apresente os cálculos efetuados.