$2^{\underline{o}}$ Teste de ÁLGEBRA LINEAR para a Engenharia

Licenciatura em Engenharia Informática/ Mestrado Integrado em Engenharia Informática

13 de dezembro de 2023 Duração: **2h**

~~Nome~~ : Uma resolução do teste Nº ________ Curso ________

1. Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$. Sem justificar, responda às questões seguintes.

   (a) Identifique as condições sobre os escalares α e β que garantem que o vetor $(\alpha, \beta, 3)$ é combinação linear de $(1,1,0), (2,1,-1)$ e $(1,0,-1)$. $\boxed{\alpha = \beta - 3, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.}$

   (b) Considere o espaço vetorial $\mathcal{S} = \langle (1,1,2,2), (0,1,2,2), (0,0,0,1), (-2,0,0,3), (-1,1,2,0) \rangle$. Indique uma base e $dim\ \mathcal{S}$. $\boxed{\mathcal{B} = ((1,1,2,2), (0,1,2,2), (0,0,0,1))\ ;\ \dim S = 3.}$

   (c) Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear tal que, para certa base B de $\mathbb{R}^3$, $|\mathcal{M}(f; B, B)| = 3$. Indique $dim\,$Nuc f. $\boxed{0 \text{ (zero).}}$

   (d) Sendo A uma matriz de tipo 3×3 e sabendo que as matrizes $A - I_3$ e $A - 3I_3$ não são invertíveis, indique um valor próprio de A. $\boxed{1}$

2. A matriz em forma de escada reduzida por linhas obtida por aplicação da condensação de Gauss-Jordan à matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ é a matriz $A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 8/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$. Sem efetuar mais cálculos diga se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa, justificando.

   (a) a sequência $((1,0,2), (-2,3,-1), (-1,1,0))$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

   As coordenadas dos 3 vetores da sequência correspondem às 3 primeiras colunas de A. Observando as 3 primeiras colunas de A' podemos dizer que $r\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 3$, pelo que os vetores $(1,0,2), (-2,3,-1)$ e $(-1,1,0)$ são linearmente independentes. Como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, a afirmação é verdadeira.

   (b) o espaço $\mathcal{S} = \langle (1,0,2), (-2,3,-1), (-1,1,0), (0,3,3), (0,3,-2) \rangle$ tem dimensão 3.

   $\dim S = r(A) = r(A') = 3$. Logo a afirmação é verdadeira.

(c) $(1,-2,-1,0,0)$, $(0,3,1,3,3)$ e $(2,-1,0,3,-2)$ são linearmente independentes.

$r(A) = r(A') = 3$. Como a matriz A tem 3 linhas, então as 3 linhas são linearmente independentes. As coordenadas dos vetores acima correspondem às 3 linhas de A. Logo a afirmação é verdadeira.

(d) Existe uma única aplicação linear $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathcal{M}(f; B_5, B_3) = A$ e $\operatorname{Nuc} f \neq \{(0,0,0,0,0)\}$ (B_5 e B_3 são as bases canónicas de $\mathbb{R}^5$ e $\mathbb{R}^3$ respetivamente).

$\operatorname{Nuc} f = \left\{ (x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid \mathcal{M}(f; B_5, B_3) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Como $r(A) = 3 < 5 =$ nº colunas de A, o sistema $AX=0$ é possível e indeterminado. Então $\mathcal{M}(f; B_5, B_3)$ define uma única aplic linear de $\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ e o sistema $\mathcal{M}(f; B_5, B_3)X = 0$ tem várias soluçs. A afirmação é verdadeira.

3. Sejam B_4 e B_3 as bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ e de $\mathbb{R}^3$, respetivamente, e $B = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Sejam $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ e $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ as transformações lineares tais que

$$M(g, B, B_4) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M(h, B_4, B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

e, para todo $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, $f(a,b,c,d) = (a-b, 2b, 3a-c+d)$. Sem justificar, indique:

(a) uma base para $\operatorname{Im} f$: $\boxed{((1,0,3),(-1,2,0),(0,0,-1))}$

(b) $g(2,-3,0)$: $\boxed{(10,3,2,-10)}$

(c) as colunas em falta na matriz $M(h; B_4, B_3)$:

$$M(h; B_4, B_3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(d) $M(f \circ g; B, B_3)$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

COTAÇÃO: cada alínea destas três [illegible]

4. No espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$, considere os subespaços vetoriais

$$\mathcal{F} = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - 3y = 0\}, \qquad \mathcal{H} = \langle (1,0,1,0),\ (0,1,2,0),\ (0,0,0,1) \rangle, \quad \text{e,}$$

para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $\qquad \mathcal{G}_\alpha = < (3,1,0,0), (0,0,2,1), (6,2,-10,-5), (-3,-1,\alpha-1,2) >$.

(a) Determine $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que $\dim \mathcal{G}_\alpha = 2$. Justifique a sua resposta e apresente os cálculos efetuados.

(b) Considere $\alpha = 3$. Justifique que $\mathcal{F} = \mathcal{G}_3$.

(c) Calcule uma base de $\mathcal{F} \cap \mathcal{H}$. Justifique e apresente os cálculos efetuados.

a)
$$\dim G_\alpha = r\begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -10 & \alpha-1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{2}L_3}}{=} r\begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -10 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\alpha+\frac{5}{2} \end{bmatrix} = \dots = r\begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & -10 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Então $\dim G_\alpha = 2$ se e só se $\alpha - 5 = 0$, ou seja, sse $\alpha = 5$.

b) $G_3 = \langle (3,1,0,0), (0,0,2,1), (6,2,-10,-5), (-3,-1,2,2) \rangle$.

Por a) sabemos que $\dim G_3 = 3$. Os vetores $(3,1,0,0), (0,0,2,1)$, $(6,2,-10,-5)$ e $(-3,-1,2,2)$ verificam a condição $x - 3y = 0$ (onde x e y são, resp., a 1ª e 2ª coordenadas). Logo $G_3 \subseteq F$. Por outro lado $F = \{(3y, y, z, w) \mid y,z,w \in \mathbb{R}\} = \langle (3,1,1,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1) \rangle$ e, então,

$$\dim F = r\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_3 \leftrightarrow L_4}}{=} r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}}{=} r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_4}{=} r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3.$$

Então, como $G_3 \subseteq F$ e $\dim F = \dim G_3$, $G_3 = F$.

c) $H = \left\{ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \text{ é possível} \right\}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 1 & 2 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c-2b \\ 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_4]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & c-2b \end{array}\right]$$

Logo $H = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid c = 2b\}$.

$F \cap H = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 3y,\ z = 2y\} = \{(3y, y, 2y, w) \mid y, w \in \mathbb{R}\}$

$= \langle (3,1,2,0), (0,0,0,1) \rangle$.

Então $((3,1,2,0),(0,0,0,1))$ é uma base de $F \cap H$ porque os 2 vetores geram $F \cap H$ e são linearmente independentes, dado que $r\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \dots = r\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$.

5. Considere o seguinte subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$: $\mathcal{S} = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y+w = y-z-w = x-z = 0\}$.

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ a aplicação linear definida por $\mathcal{M}(\varphi; B_4, B_4) = A$, onde B_4 é a base canónica de $\mathbb{R}^4$. Justificando responda a cada uma das alíneas seguintes.

(a) Calcule a forma geral de um vetor do subespaço vetorial $\varphi(\mathcal{S})$.

(b) Calcule $\varphi(-2,1,-1,1)$ e indique um valor próprio da matriz A e um da matriz A^2.

a) Começamos por resolver o sistema $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_2]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 + L_2]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Então: $S = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - z = 0,\ y - z - w = 0\}$

$= \{(z, z+w, z, w) \mid z, w \in \mathbb{R}\}$

$= \langle (1,1,1,0), (0,1,0,1) \rangle$.

e $\varphi(S) = \{\varphi(z, z+w, z, w) \mid z, w \in \mathbb{R}\} = \langle \varphi(1,1,1,0), \varphi(0,1,0,1) \rangle$

$= \langle (2,2,2,2), (-1,3,1,3) \rangle$ porque $A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

O sistema $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ é possível se e só se $d = b$ e $c = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$,

pois: $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & a \\ 2 & 3 & b \\ 2 & 1 & c \\ 2 & 3 & d \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}]{} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & a \\ 0 & 4 & b-a \\ 0 & 2 & c-a \\ 0 & 4 & d-a \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2}]{} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & a \\ 0 & 4 & b-a \\ 0 & 0 & c - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a \\ 0 & 0 & d-b \end{array}\right]$.

Consequentemente $\varphi(S) = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : d = b,\ c = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\}$

$= \{(a, b, \frac{1}{2}(a+b), b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

A forma geral dos vetores de $\varphi(S)$ é $(a, b, \frac{1}{2}(a+b), b)$ com $a, b \in \mathbb{R}$.

b) $A \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ pelo que $\varphi(-2,1,-1,1) = (-4, 2, -2, 2)$ e

2 é valor próprio de A.

$A^2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = A\left(2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 2 \cdot 2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Então 4 é valor próprio de A^2.

COTAÇÃO: cada alínea destas duas últimas questões vale 1,6 .

Respostas alternativas / justificação da resposta às questões 1 e 3.

1 b) Base de S poderia ser uma sequência de quaisquer 3 vetores pertencentes a S e linearmente independentes.

1 d) 3

3 a) Dado que $\dim \mathrm{Im} f = 3$ e $\mathrm{Im} f \leq \mathbb{R}^3$, então $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^3$, pelo que a resposta poderia ser uma qualquer base de $\mathbb{R}^3$.

3 b) $(2,-3,0) = 5(1,0,0) - 3(1,1,0) + 0(1,1,1)$

$$\mathcal{M}(g; B, B_4) \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 2 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$g(2,-3,0) = (10, 3, 2, -10)$

3 c) $h(1,0,0,0) = 1 \cdot (1,0,0) + 0(1,1,0) + 1(1,1,1) = (2,1,1)$

$h(0,1,0,0) = \ldots$

$h(0,0,1,0) = -1(1,0,0) + 2(1,1,0) + 0(1,1,1) = (1,2,0)$

$h(0,0,0,1) = 0(1,0,0) + 1(1,1,0) + 3(1,1,1) = (4,4,3)$

em alternativa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathcal{M}(h; B_4, B_3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

3 d) $\mathcal{M}(f \circ g; B, B_3) = \mathcal{M}(f; B_4, B_3) \cdot \mathcal{M}(g; B, B_4)$

e $f(1,0,0,0) = (1,0,3)$ $\qquad$ $f(0,0,1,0) = (0,0,-1)$

$f(0,1,0,0) = (-1,2,0)$ $\qquad$ $f(0,0,0,1) = (0,0,1)$