Universidade do Minho	Lic. em Ciências da Computação
Departamento de Matemática	6 de janeiro de 2024

2º teste de Álgebra Linear CC

Duração: 2 horas

Nome do aluno: ______________________________ Número: ________

Grupo I

Relativamente às questões deste grupo, indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando a opção conveniente.

		V	F
1.	A aplicação $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = xyz$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, é uma aplicação linear.	☐	☐
2.	Existe uma aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(2, 2) = (1, 2, 3)$ e $f(3, 3) = (0, 1, 0)$.	☐	☐
3.	Para quaisquer espaços vetoriais reais V e V' de dimensão finita, se existe uma aplicação linear injetiva $f : V \to V'$, então $\dim V \leq \dim V'$.	☐	☐
4.	Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que A é invertível, tem-se $\det(2A^T A^{-1}) = 2$.	☐	☐
5.	Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\det(A^T B) = \det(B^T A)$.	☐	☐
6.	Para qualquer matriz A do tipo 5×5, se $\det A = 1$, então $car(A) \neq 4$.	☐	☐
7.	Para qualquer matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, se $(A - 3I_2)x = 0_{2\times 2}$ é um sistema de Cramer, então 3 não é um valor próprio de A.	☐	☐
8.	Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se $y \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ é um vetor próprio de A associado ao valor próprio 2, então $7y$ é um vetor próprio de A associado ao valor próprio 14.	☐	☐

Grupo II

Resolva cada uma das questões deste grupo na folha de exame. Justifique as suas respostas.

1. Considere as bases de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)),$$
$$\mathcal{B}' = ((-1, 1, 1), (0, 2, 0), (1, 0, 0))$$

e a base de $\mathbb{R}^4$

$$\mathcal{B}'' = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)).$$

Seja $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear definida por

$$M(g; \mathcal{B}'', \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que, para todo $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$,

$$g(a, b, c, d) = (3a + 2b - c - 2d, 2a + b - c - d, 2a - 2c).$$

$\overrightarrow{\text{v.s.f.f.}}$

(b) Determine uma base de $\operatorname{Nuc} g$ e a dimensão de $\operatorname{Im} g$. Diga se g é injetiva e se é sobrejetiva.

(c) Determine as matrizes $M(id_{\mathbb{R}}^3; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ e $M(g; \mathcal{B}'', \mathcal{B}')$.

2. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule $\det A$.

(b) Justifique que B é invertível e calcule $\det(2B^{-2}B^TA^2)$.

3. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Mostre que se $\det A = 1$ e todas as entradas de A são números inteiros, então A é invertível e todas as entradas de A^{-1} são números inteiros.

4. Sejam $\mathcal{B}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e h o endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$M(h, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Verifique que $(-1, 0, 1)$ é um vetor próprio de h e indique a que valor próprio está associado.

(b) Justifique que -2 é um valor próprio de h e determine uma base do subespaço próprio de h associado a este valor próprio.

(c) Justifique que h é diagonalizável. Dê exemplo de uma base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $M(h; \mathcal{B}', \mathcal{B}')$ seja diagonal.

Cotação - Grupo I: $8 \times 0,75$.

Grupo II: 1.$(1,25 + 2,25 + 1,5)$; 2.(1,5+1,25); 3.(1,75); 4.$(1,25 + 2,0 + 1,25)$.