Universidade do Minho	Lic. em Ciências da Computação
Departamento de Matemática	6 de janeiro de 2024

2º teste de Álgebra Linear CC

Duração: 2 horas

Nome do aluno: ______________________________ Número: ________

Grupo I

Relativamente às questões deste grupo, indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando a opção conveniente.

V F

1. A aplicação $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = xyz$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, é uma aplicação linear. ☐ ☒

   A aplicação f não é uma aplicação linear, uma vez que existem $(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ e $2 \in \mathbb{R}$ tais que

   $$f(2(1, 1, 1)) = f(2, 2, 2) = 2^3 \neq 2 \times 1^3 = 2f(1, 1, 1).$$

2. Existe uma aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(2, 2) = (1, 2, 3)$ e $f(3, 3) = (0, 1, 0)$. ☐ ☒

   Se admitirmos que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é uma aplicação linear e que $f(2, 2) = (1, 2, 3)$, então

   $$f(3, 3) = f\left(\frac{3}{2}(2, 2)\right) = \frac{3}{2}f(2, 2) = \frac{3}{2}(1, 2, 3) = \left(\frac{3}{2}, 3, \frac{9}{2}\right) \neq (0, 1, 0).$$

   Logo, não existe qualquer aplicação linear nas condições indicadas.

3. Para quaisquer espaços vetoriais reais V e V' de dimensão finita, se existe uma aplicação linear injetiva $f : V \to V'$, então $\dim V \leq \dim V'$. ☒ ☐

   Sejam V e V' espaços vetoriais reais de dimensão finita e admitamos que existe uma aplicação linear injetiva $f : V \to V'$. Considerando que f é injetiva, tem-se $\operatorname{Nuc} f = \{0_V\}$. Por conseguinte, como $\dim V = \dim \operatorname{Nuc} f + \dim \operatorname{Im} f$, segue que $\dim V = \dim \operatorname{Im} f$. Atendendo a que $\dim \operatorname{Im} f \leq \dim V'$ (pois $\operatorname{Im} f$ é um subespaço de V'), conclui-se que $\dim V \leq \dim V'$.

4. Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que A é invertível, tem-se $\det(2A^TA^{-1}) = 2$. ☐ ☒

   Considerando as propriedades relativas a determinantes, temos

   $$\det(2A^TA^{-1}) = 2^n \det(A^T) \det(A^{-1}) = 2^n \det(A)(\det(A))^{-1} = 2^n.$$

   Assim, se $n \neq 1$, tem-se $\det(2A^TA^{-1}) \neq 2$.

5. Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\det(A^TB) = \det(B^TA)$. ☒ ☐

   Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Considerando que A e B são matrizes quadradas, A^T e B^T também são matrizes quadradas. Assim,

   $\det(A^TB) = \det(A^T) \det(B) = \det(B) \det(A^T) = \det(B^T) \det(A) = \det(B^TA).$

V F

6. Para qualquer matriz A do tipo 5×5, se $\det A = 1$, então $car(A) \neq 4$. ☐ ☐

Se A é uma matriz do tipo 5×5 tal que $\det A = 1$, então A é invertível. Logo $car(A) = 5$ e, portanto, $car(A) \neq 4$.

7. Para qualquer matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, se $(A - 3I_2)x = 0_{2\times 2}$ é um sistema de Cramer, então 3 não é um valor próprio de A. ☐ ☐

Se $(A - 3I_2)x = 0_{2\times 2}$ é um sistema de Cramer, então a matriz $A - 3I_2$ é invertível. Logo $|A - 3I_2| \neq 0$ e, portanto, 3 não é um valor próprio de A.

8. Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se $y \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ é um vetor próprio de A associado ao valor próprio 2, então $7y$ é um vetor próprio de A associado ao valor próprio 14. ☐ ☒

Se $y \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ é um vetor próprio de A associado ao valor próprio 2, tem-se $y \neq 0_{n\times 1}$ e $Ay = 2y$. Logo, $A(7y) = 7(Ay) = 7(2y) = 2(7y)$. Então, como $7y \neq 0_{n\times 1}$ e $A(7y) = 2(7y)$, $7y$ é um vetor próprio de A associado ao valor próprio 2.

Grupo II

Resolva cada uma das questões deste grupo na folha de exame. Justifique as suas respostas.

1. Considere as bases de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)),$$
$$\mathcal{B}' = ((-1,1,1),(0,2,0),(1,0,0))$$

e a base de $\mathbb{R}^4$

$$\mathcal{B}'' = ((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)).$$

Seja $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear definida por

$$M(g;\mathcal{B}'',\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que, para todo $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$,

$$g(a,b,c,d) = (3a + 2b - c - 2d, 2a + b - c - d, 2a - 2c).$$

Temos

$$(a,b,c,d) = a(1,0,0,0) + b(0,1,0,0) + c(0,0,1,0) + d(0,0,0,1),$$

logo

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

é o vetor coluna de (a,b,c,d) relativamente à base $\mathcal{B}''$. Por conseguinte,

$$M(g;\mathcal{B}'',\mathcal{B})\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\\ d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\\ d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a-2c\\ b+c-d\\ a+b-d\end{bmatrix}$$

é o vetor coluna de $g(a,b,c,d)$ relativamente à base $\mathcal{B}$.

Assim,

$$\begin{aligned} g(a,b,c,d) &= (2a-2c)(1,1,1)+(b+c-d)(1,1,0)+(a+b-d)(1,0,0)\\ &= (3a+2b-c-2d, 2a+b-c-d, 2a-2c). \end{aligned}$$

(b) Determine uma base de $\operatorname{Nuc} g$ e a dimensão de $\operatorname{Im} g$. Diga se g é injetiva e se é sobrejetiva.

Por definição de $\operatorname{Nuc} g$, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{Nuc} g &= \{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \,|\, g(a,b,c,d)=(0,0,0)\}\\ &= \{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \,|\, 3a+2b-c-2d=0, 2a+b-c-d=0, 2a-2c=0\}\\ &= \{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \,|\, a=c, b=-c+d\}\\ &= \{(c,-c+d,c,d)\in\mathbb{R}^4 \,|\, c,d\in\mathbb{R}\}\\ &= \{c(1,-1,1,0)+d(0,1,0,1)\in\mathbb{R}^4 \,|\, c,d\in\mathbb{R}\}\\ &= <(1,-1,1,0),(0,1,0,1)>. \end{aligned}$$

A sequência $((1,-1,1,0),(0,1,0,1))$ é linearmente independente, pois, para quaisquer $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,

$$\alpha(1,-1,1,0)+\beta(0,1,0,1)=(0,0,0,0)\Rightarrow \alpha=\beta=0.$$

Logo, a sequência $((1,-1,1,0),(0,1,0,1))$ é uma base de $\operatorname{Nuc} g$ e, por conseguinte, $\dim \operatorname{Nuc} g = 2$.

Uma vez que $\dim\mathbb{R}^4 = \dim\operatorname{Nuc} g + \dim\operatorname{Im} g$, $\dim\mathbb{R}^4 = 4$ e $\dim\operatorname{Nuc} g = 2$, concluímos que $\dim\operatorname{Im} g = 2$.

A aplicação g não é injetiva, pois $\operatorname{Nuc} g \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$. A aplicação g também não é sobrejetiva, pois $\operatorname{Im} g \neq \mathbb{R}^3$ ($\dim\operatorname{Im} g = 2 \neq 3 = \dim\mathbb{R}^3$).

(c) Determine as matrizes $M(id_{\mathbb{R}}^3;\mathcal{B},\mathcal{B}')$ e $M(g;\mathcal{B}'',\mathcal{B}')$.

Temos

$$\begin{aligned} id_{\mathbb{R}}^3(1,1,1) &= (1,1,1) = 1(-1,1,1)+0(0,2,0)+2(1,0,0)\\ id_{\mathbb{R}}^3(1,1,0) &= (1,1,0) = 0(-1,1,1)+\tfrac{1}{2}(0,2,0)+1(1,0,0)\\ id_{\mathbb{R}}^3(1,0,0) &= (1,0,0) = 0(-1,1,1)+0(0,1,0)+1(1,0,0), \end{aligned}$$

logo

$$M(id_{\mathbb{R}}^3;\mathcal{B},\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} M(g;\mathcal{B}'',\mathcal{B}') &= M(id_{\mathbb{R}}^3;\mathcal{B},\mathcal{B}')M(g;\mathcal{B}'',\mathcal{B})\\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 5 & 2 & -3 & -2\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule $\det A$.

Calculando o $\det A$ recorrendo ao Teorema de Laplace, temos

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} &= (-1)^{2+4} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \times 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (2 \times 2 - 2 \times 1) - 2 \times ((-1) \times 2 - 1 \times 1) \\ &= 8. \end{aligned}$$

(b) Justifique que B é invertível e calcule $\det(2B^{-2}B^TA^2)$.

Uma vez que B é uma matriz quadrada e

$$\det B = (-1) \times 1 \times 1 \times 2 = -2 \neq 0,$$

então B é invertível.

Considerando que as matrizes B^{-2}, B^T e A^2 são matrizes quadradas e $B^{-2}B^TA^2$ é uma matriz do tipo 4×4, temos

$$\begin{aligned} \det(2B^{-2}B^TA^2) &= 2^4 \times \det(B^{-2}) \times \det B^T \times \det(A^2) \\ &= 2^4 \times (\det(B))^{-2} \times \det B \times (\det(A))^2 \\ &= 2^4 \times (-2)^{-2} \times (-2) \times 2^6 \\ &= -2^9. \end{aligned}$$

3. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Mostre que se $\det A = 1$ e todas as entradas de A são números inteiros, então A é invertível e todas as entradas de A^{-1} são números inteiros.

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, com $n \in \mathbb{N}$. Admitamos que $\det A = 1$ e que todas as entradas de A são números inteiros. Como A é uma matriz quadrada e $\det A \neq 0$, então A é invertível e tem-se $A^{-1} = \frac{1}{\det A} Adj(A) = Adj(A)$. Considerando que $Adj(A) = [\widehat{a}_{ij}]^T$, onde $\widehat{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A(i|j))$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, e todas as entradas de A são números inteiros, segue que todas as entradas de $Adj(A)$ são também números inteiros. De facto, se todas as entradas de A são números inteiros, então, as entradas de $A(i|j)$ também são números inteiros, para todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Além disso, como o determinante de uma matriz é obtido a partir das suas entradas recorrendo apenas às operações de adição e multiplicação, o determinante de uma matriz cujas entradas são números inteiros é um número inteiro. Logo, todas as entradas de A^{-1} são números inteiros.

4. Sejam $\mathcal{B}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e h o endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$M(h, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Verifique que $(-1,0,1)$ é um vetor próprio de h e indique a que valor próprio está associado.

Tem-se

$$(-1,0,1) = -1(1,0,0) + 0(0,1,0) + 1(0,0,1),$$

pelo que

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

é o vetor coluna de $(-1,0,1)$ relativamente à base $\mathcal{B}$. Logo

$$M(h;\mathcal{B},\mathcal{B}) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é o vetor coluna de $h(-1,0,1)$ relativamente à base $\mathcal{B}$. Portanto,

$$h(-1,0,1) = 0(1,0,0) + 0(0,1,0) + 0(0,0,1) = (0,0,0).$$

Uma vez que $(-1,0,1) \neq (0,0,0)$ e $h(-1,0,1) = 0(-1,0,1)$, concluímos que $(-1,0,1)$ é um vetor próprio de h associado ao valor próprio 0.

(b) Justifique que -2 é um valor próprio de h e determine uma base do subespaço próprio de h associado a este valor próprio.

Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, λ é valor próprio de h se e só se $|M(h;\mathcal{B},\mathcal{B}) - \lambda I_3| = 0$.
Então, como

$$|M(h;\mathcal{B},\mathcal{B}) - (-2)I_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ (pois a matriz tem uma linha nula)},$$

concluímos que -2 é um valor próprio de h.

Por definição de subespaço próprio de h associado ao valor próprio -2, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^3_{[h,-2]} &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, h(a,b,c) = -2(a,b,c)\} \\
&= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, h(a,b,c) + 2(a,b,c) = 0_{\mathbb{R}^3}\} \\
&= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (h + 2id_{\mathbb{R}^3})(a,b,c) = 0_{\mathbb{R}^3}\} \quad (*) \\
&= \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (A + 2I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \begin{bmatrix} a+b-c \\ 0 \\ -a-b+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a = -b + c\} \\
&= \{(-b+c,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, b,c \in \mathbb{R}\} \\
&= \{b(-1,1,0) + c(1,0,1) \in \mathbb{R}^3 \,|\, b,c \in \mathbb{R}\} \\
&= \, < (-1,1,0),(1,0,1) > .
\end{aligned}$$

(*) Uma vez que $(a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$, o vetor coluna de (a,b,c) relativamente à base $\mathcal{B}$ é $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$.

A sequência $((-1,1,0),(1,0,1))$ é linearmente independente, pois, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\alpha(-1,1,0) + \beta(1,0,1) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Logo, $((-1,1,0),(1,0,1))$ é uma base de $\mathbb{R}^3_{[h,-2]}$.

(c) Justifique que h é diagonalizável. Dê exemplo de uma base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $M(h;\mathcal{B}',\mathcal{B}')$ seja diagonal.

Da alínea (a) sabe-se que $(-1,0,1)$ é um vetor próprio de h associado ao valor próprio 0. A sequência $((-1,0,1))$ é linearmente independente, pois $(-1,0,1) \neq (0,0,0)$. Da alínea (b) sabemos que a sequência $((-1,1,0),(1,0,1))$ é linearmente independente e é formada por vetores próprios de h associados ao valor próprio -2. Como as duas sequências anteriores são sequências linearmente independentes formadas por vetores próprios associados a valores próprios distintos, a sequência $\mathcal{B}' = ((-1,0,1),(-1,1,0),(1,0,1))$ é linearmente independente. Como a sequência $\mathcal{B}'$ tem 3 vetores e $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, então $\mathcal{B}'$ é uma base de $\mathbb{R}^3$. Considerando que h é um endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ e existe uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vetores próprios de h, concluímos que h é diagonalizável. A base $\mathcal{B}' = ((-1,0,1),(-1,1,0),(1,0,1))$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ tal que $M(h;\mathcal{B}',\mathcal{B}')$ é diagonal, pois

$$M(h;\mathcal{B}',\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Cotação - Grupo I: $8 \times 0,75$.

Grupo II: 1.$(1,25+2,25+1,5)$; 2.(1,5+1,25); 3.(1,75); 4.$(1,25+2,0+1,25)$.