Análise Matemática para Engenharia

Licenciatura em Engenharia Informática

2023/2024

Exercício 2.1 Mostre, recorrendo à definição, que:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)}(x+y)=1;$ b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$

Exercício 2.2 Mostre que:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3}{x^2+y^2}=0;$ b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=0;$

Exercício 2.3 Calcule, caso exista, cada um dos seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)}x^3y;$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{xy}}{x+1};$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 1}(x^2,e^x);$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\tfrac{\cos x}{x^2+y^2+1},e^{x^2}\right);$

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2+2};$

f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{y^2-x^2}{x-y};$

g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\operatorname{sen}(xy)}{xy};$

h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2};$

i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2};$

j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2};$

k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y}{x^2+y^2}+x;$

l) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y^2}{x^2-y^2};$

m) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^5}{x^2+y^4};$

n) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{x^2y^2};$

o) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(-1,1,0)}(xe^{xz},x^2yz).$

Exercício 2.4 Apresente, caso seja possível, um prolongamento contínuo à origem de cada uma das funções definidas por:

a) $f(x,y)=\dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y};$ b) $f(x,y)=\dfrac{2(x-1)y^2}{x^2+y^2};$ c) $f(x,y)=\dfrac{2x^2y}{x^2+3y^2}.$

Exercício 2.5 Estude a continuidade de cada uma das funções definidas por:

a) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0);\end{cases}$

b) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{3x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0);\end{cases}$

c) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } x\neq -y,\\ \frac{x^2}{2} & \text{se } x=-y;\end{cases}$

d) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{se } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0);\end{cases}$

e) $f(x,y)=\begin{cases}x & \text{se } x\geq y,\\ y & \text{se } x<y;\end{cases}$

f) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0);\end{cases}$

g) $f(x,y,z)=\left(\ln(1+y^2),xz,\cos\sqrt[3]{x+y}\right).$