Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática

Análise Matemática para Engenharia

Licenciatura em Engenharia Informática

2023/2024

Exercício 4.1 Determine a matriz jacobiana das seguintes funções:

a) $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\boldsymbol{f}(x,y) = (x,y)$;

b) $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\boldsymbol{f}(x,y) = (xe^y + \cos y, x, x + e^y)$;

c) $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\boldsymbol{f}(x,y) = (xye^{xy}, x \operatorname{sen} y, 5xy^2)$;

d) $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\boldsymbol{f}(x,y,z) = (x-y, y+z)$;

e) $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\boldsymbol{f}(x,y,z) = (x+y+e^z, x^2y)$.

Exercício 4.2 Considere as funções

$$\begin{array}{rccc} \boldsymbol{f}: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x-y+z, x^2yz, xyz) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \boldsymbol{g}: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (xy, yz, 2x, xyz) \end{array}$$

a) Calcule $D\boldsymbol{f}\big((-1,0,-1);(2,3,-1)\big)$ e $D\boldsymbol{g}\big((-1,0,-1);(2,3,-1)\big)$.

b) Calcule $D\boldsymbol{f}(-1,0,1)$ e $D\boldsymbol{g}(-1,0,1)$.

Exercício 4.3 Considere a função $\begin{array}{rccc} \boldsymbol{f}: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (3x, x+2y) \end{array}$

a) Calcule a matriz jacobiana de $\boldsymbol{f}$.

b) Justifique que a função $\boldsymbol{f}$ é derivável.

c) Calcule a derivada da função $\boldsymbol{f}$ no ponto $(1,2)$; compare a função $D\boldsymbol{f}(1,2)$ com a função $\boldsymbol{f}$.

d) Dado $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, calcule $D\boldsymbol{f}(x_0,y_0)$.

Exercício 4.4 Considere a função $\begin{array}{rccc} \boldsymbol{f}: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (2x^2, 3y, 2xy) \end{array}$

a) Calcule a matriz jacobiana de $\boldsymbol{f}$.

b) Justifique que a função $\boldsymbol{f}$ é derivável e calcule a derivada da função f no ponto $(1,1)$.

c) Determine $D\boldsymbol{f}(1,1)(2,3)$.

Exercício 4.5 Calcule as derivadas parciais de 2ª ordem das seguintes funções e averigue em que casos as derivadas mistas são iguais.

a) $f(x,y) = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$;

b) $f(x,y) = \cos(xy^2)$;

c) $f(x,y) = e^{-xy^2} + y^3x^4$;

d) $f(x,y) = \dfrac{1}{\cos^2 x + e^{-y}}$.

Exercício 4.6 Mostre que a função $g(x,t) = 2 + e^{-t} \operatorname{sen} x$, satisfaz a equação do calor $\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$.

Exercício 4.7 Verifique que $f_{xzw} = f_{zwx}$ para $f(x,y,z,w) = e^{xyz} \operatorname{sen}(xw)$.

Exercício 4.8 Usando o teorema de Schwarz, mostre que não pode existir uma função $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ cujas derivadas parciais de primeira ordem sejam:

a) $f_x(x,y) = 2x^3, \qquad f_y(x,y) = yx^2 + x\,;$

b) $f_x(x,y) = x \operatorname{sen} y, \qquad f_y(x,y) = y \operatorname{sen} x\,.$

Exercício 4.9 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Determine f_x e f_y .

b) Calcule $f_{xy}(0,0)$ e $f_{yx}(0,0)$.

c) Explique porque não há contradição com o teorema de Schwarz.

Exercício 4.10 Considere as funções

$$u: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\,, \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array} \qquad v: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\,, \\ (x,y) & \longmapsto & \operatorname{sen}(xy) \end{array} \qquad w: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\,, \\ (x,y) & \longmapsto & e^x \end{array}$$

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x^2y + y^2z \end{array} \qquad \text{e} \qquad h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\,. \\ (x,y) & \longmapsto & f(u(x,y), v(x,y), w(x,y)) \end{array}$$

Determine $\nabla h(x,y)$.

Exercício 4.11 Considere a função $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x^2y - xz \end{array}$ e $a \in \mathbb{R}$.

a) Calcule $Df(1,0,0)(1,2,2)$.

b) Determine a de modo que a função $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(at^2, at, t^3) \end{array}$ tenha derivada nula.

Exercício 4.12 Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável. Considere a função $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x,y) = f(xy)$. Mostre que $x\frac{\partial F}{\partial x} = y\frac{\partial F}{\partial y}$.

Exercício 4.13 Calcule:

a) $\dfrac{du}{dt}$, onde $u = \ln\left(\operatorname{sen} \frac{x}{y}\right)$ e $x = 3t^2$, $y = \sqrt{1+t^2}$;

b) $\dfrac{\partial w}{\partial p}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial q}$, onde $w = r^2 + s^2$ e $r = pq^2$, $s = p^2 \operatorname{sen} q$;

c) $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial t}$, onde $z = x^2 \operatorname{sen} y$ e $x = s^2 + t^2$, $y = 2st$.

Exercício 4.14 Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções duas vezes deriváveis e seja

$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x+y) + g(x-y) \end{array}$$

Verifique que $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$.