Exercício 8.1 Calcule os seguintes integrais:

a) $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} (x+y+z)\ d(x,y,z)$ com $\mathcal{D}=[0,2]^3$;

b) $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} ze^{x+y}\ dV$, com $\mathcal{D}=[0,1]^3$;

c) $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} xy\ d(x,y,z)$, com $\mathcal{D}=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x+y+z\leq 1\big\}$;

d) $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} x\ dV$, com $\mathcal{D}=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\leq z\leq 3\big\}$.

Exercício 8.2 Use integrais triplos para expressar o volume do sólido definido pela superfície de equação $z=a-x^2-y^2$, com $a>0$, e pelo plano XOY.

Exercício 8.3 Apresente um integral triplo que expresse o volume do elipsoide definido pela equação $4x^2+4y^2+z^2=16$.

Exercício 8.4 Faça um esboço da região de integração e reescreva o integral com ordem de integração $dx\,dy\,dz$:

a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^x\int_0^y f(x,y,z)\ dz\,dy\,dx$;

b) $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{x^2}^1\int_0^{1-y} f(x,y,z)\ dz\,dy\,dx$.

Exercício 8.5 Calcule, mudando eventualmente a ordem de integração,

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\int_x^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\int_1^3 \operatorname{sen} y^2\ dz\,dy\,dx.$$

Exercício 8.6 Considerando $\mathcal{D}=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x,y>0,\ \sqrt{x+y}+1\leq z\leq 2\big\}$, calcule

$$\iiint_{\mathcal{D}} \frac{1}{\sqrt{xy}}\, d(x,y,z),$$

usando a mudança de variável definida por

$$\begin{array}{rccc}\Phi: & \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}. \\ & (u,v,w) & \longmapsto & (u^2,v^2,w)\end{array}$$

Exercício 8.7 Considere o conjunto

$$\mathcal{D}=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 1\leq x+2y+z\leq 2,\ 0\leq x+y-z\leq \tfrac{\pi}{4},\ 0\leq z\leq 1\big\}.$$

a) Calcule o volume de $\mathcal{D}$.

b) Calcule $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} \frac{\operatorname{sen}(x+y+z)}{x+2y+z}\, d(x,y,z)$.

Exercício 8.8 Usando coordenadas cilíndricas calcule

$$\int_0^1 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} z(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Exercício 8.9 Seja $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 4,\, 2 \leq z \leq 3\}$. Use coordenadas cilíndricas para determinar

$$\iiint_{\mathcal{D}} ze^{x^2+y^2}\; d(x,y,z).$$

Exercício 8.10 Seja $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 4-(x^2+y^2)\}$. Calcule, usando coordenadas, cilíndricas,

$$\iiint_{\mathcal{D}} (x+y)\,d(x,y,z).$$

Exercício 8.11 Seja $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \leq x^2+y^2 \leq 9\}$. Calcule o volume de V, usando coordenadas cilíndricas.

Exercício 8.12 Usando coordenadas esféricas, calcule o volume do sólido interior ao cone de equação $z^2 = x^2+y^2$ e à esfera de equação $x^2+y^2+z^2=4$.

Exercício 8.13 Considere a região $\mathcal{D}$ definida, em coordenadas esféricas, pelas condições $1 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $\frac{\pi}{6} \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}$.

a) Represente graficamente a região $\mathcal{D}$.

b) Calcule $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,d(x,y,z)$.

Exercício 8.14 Calcule o volume de $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 6,\, y \geq 0,\, 0 \leq z \leq 4-y^2\}$.

Exercício 8.15 Calcule o volume das regiões limitadas

a) pelas superfícies esféricas $x^2+y^2+z^2=9$ e $x^2+y^2+z^2=3$;

b) pelos parabolóides $z=x^2+y^2$ e $z=12-x^2-y^2$;

c) pelo plano $x=1$ e pelo parabolóide $y^2+z^2=4x$;

d) pelo plano $x=9$ e pelo parabolóide elíptico $4y^2+9z^2=4x$;

e) pelo plano $z=0$, pelo parabolóide $z=x^2+y^2$ e pelas superfícies cilíndricas $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=4$.

Exercício 8.16 Calcule o volume da esfera em $\mathbb{R}^4$ de raio $r>0$.