Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática

2. Funções de várias variáveis

fmiranda@math.uminho.pt
mif@math.uminho.pt

2023/2024

2. Funções de várias variáveis $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

① $n = 1, m = 1$ funções (escalares) reais de uma variável real

Exemplo: $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 + 1 \end{array}$

② $n = 1, m > 1$ funções vetoriais de uma variável real

Exemplo: $\boldsymbol{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x, x - 3) \end{array}$

③ $n > 1, m = 1$ funções (escalares) reais de várias variáveis reais

Exemplo: $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array}$

④ $n > 1, m > 1$ funções vetoriais de várias variáveis reais

Exemplo: $\boldsymbol{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y, x - y, 2x) \end{array}$

2.1 Funções reais de várias variáveis reais

Seja $\mathcal{D}$ um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ uma função de n variáveis.

$\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se o domínio de f e $f(\mathcal{D}) \subseteq \mathbb{R}$ diz-se o contradomínio

Exemplos

- $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} + 1$

$$\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$$

- $g(x,y,z) = \dfrac{x + 3y - z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$

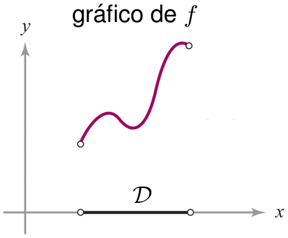
$$\mathcal{D}_g = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$$

Quando o domínio de f está omisso, subentende-se que este é o maior subconjunto de $\mathbb{R}^n$ onde a expressão analítica que define f tem significado.

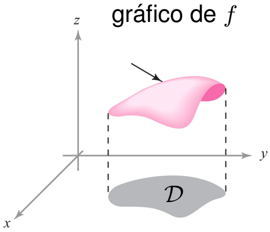
O gráfico de $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, é o conjunto

$$\text{Gr}\, f := \{(x_1, \ldots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{D} \text{ e } y = f(x_1, \ldots, x_n)\}$$

- Se $n = 1$, o gráfico de f é uma curva em $\mathbb{R}^2$;
- Se $n = 2$, o gráfico de f é uma superfície em $\mathbb{R}^3$;
- Se $n = 3$, o gráfico de f é uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^4$.



$n = 1$



$n = 2$

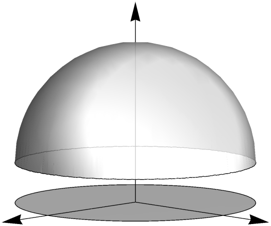
Exemplo Consideremos novamente a função

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} + 1,$$

cujo domínio já vimos que é

$$\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

O gráfico de f é uma semiesfera de raio 3 e centro em $(0, 0, 1)$.



Outra forma de descrever graficamente o comportamento de uma função $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$, consiste em esboçar as curvas

$$f(x, y) = c, \text{ para vários valores constantes } c \in f(\mathcal{D})$$

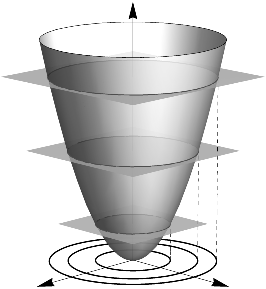
Estas curvas são chamadas *curvas* de nível de f, porque são as projeções verticais no plano xy das curvas nas quais o gráfico de $z = f(x, y)$ interseta o plano horizontal (nível) $z = c$.

Exemplo

As curvas de nível c ($c \geq 0$) da função

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

são circunferências centradas na origem de raio $\sqrt{c}$.



3 curvas de nível de f

Se f é uma função de três variáveis, a *superfície* de nível c é o conjunto

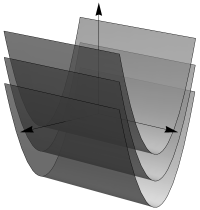
$$\Sigma_c = \{(x, y, z) \in \mathcal{D}_f : f(x, y, z) = c\}$$

Exemplo

As superfícies de nível da função

$f(x, y, z) = x^2 - z$

são cilindros parabólicos.



3 superfícies de nível de f

Em geral, a *hipersuperfície* de nível c de uma função de n variáveis é o conjunto

$$\Sigma_c = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}^n : f(\boldsymbol{x}) = c\}.$$

2.2 Funções vetoriais de várias variáveis reais

A função vetorial de n variáveis reais $\boldsymbol{f} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, fica definida por m funções reais de n variáveis reais

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_m(\boldsymbol{x})),$$

com $f_i : \mathcal{D} \to \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, m$. As funções f_i são designadas funções componentes de $\boldsymbol{f}$.

Quando não é explicitado, o domínio de $\boldsymbol{f}$ é a interseção dos domínios das suas funções componentes.

Exemplo Seja $\boldsymbol{f}$ a função definida por $\boldsymbol{f}(t) = (\sqrt{t-1}, \sqrt{5-t})$.
As funções componentes de $\boldsymbol{f}$ são:

$$f_1(t) = \sqrt{t-1} \qquad \text{e} \qquad f_2(t) = \sqrt{5-t}$$

e o domínio de $\boldsymbol{f}$ é

$$\mathcal{D}_{\boldsymbol{f}} = [1, +\infty[\cap]-\infty, 5] = [1, 5].$$

2.3 LIMITES E CONTINUIDADE

Definição Sejam $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{a} \in \mathcal{D}'$. Diz-se que $\ell \in \mathbb{R}$ é o limite de $f(\boldsymbol{x})$ quando $\boldsymbol{x}$ tende para $\boldsymbol{a}$ e escreve-se

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \ell,$$

se $\quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{D} \;\; 0 < ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}|| < \delta \Rightarrow |f(\boldsymbol{x}) - \ell| < \varepsilon$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; f(B(\boldsymbol{a}, \delta) \cap \mathcal{D} \setminus \{\boldsymbol{a}\}) \subseteq B(\ell, \varepsilon).$$

Teorema: *O limite de $f(\boldsymbol{x})$ quando $\boldsymbol{x}$ tende para $\boldsymbol{a}$, se existir, é único.*

- Para funções de uma variável, dizer que
$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell$$
é dizer que $f(x)$ se aproxima arbitrariamente do número real ℓ, desde que x esteja suficientemente próximo de a.

- Se $n = 2$, isto é, se f é uma função de duas variáveis[1], então
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \ell$$
se e só se $f(x,y)$ está arbitrariamente próximo do número real ℓ, desde que (x,y) esteja suficientemente próximo de (a,b) (independentemente do modo como a aproximação de (a,b) se processa).

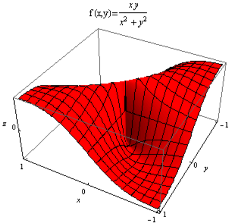
- Assim, se encontrarmos duas trajetórias C_1 e C_2 tais que
$$\lim_{\substack{(x,\,y)\,\to\,(a,\,b)\\(x,\,y)\,\in\,C_1}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{(x,\,y)\,\to\,(a,\,b)\\(x,\,y)\,\in\,C_2}} f(x,y),$$
podemos concluir que não existe $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$.

[1] Se $n > 2$, a situação é análoga.

Exemplo Seja $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$. Calcule, caso exista, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

- Consideremos que (x,y) se aproxima de $(0,0)$ ao longo da reta de equação $x=0$. Então

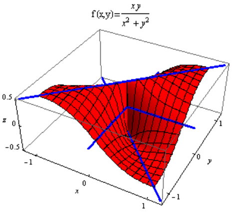
$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0.$$



- Considerando retas do tipo $y=mx$, $m\in\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{(1+m^2)x^2} = \frac{m}{1+m^2}.$$

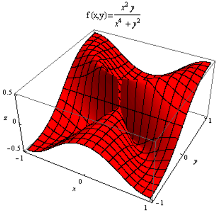
O limite anterior depende do valor de m, i.e. para valores de m distintos, obtemos valores diferentes para os limites ao longo das trajetórias.
Logo, não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.



Exemplo Seja $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$. Calcule, caso exista, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

- Limite segundo a reta de equação $x = 0$.

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0.$$

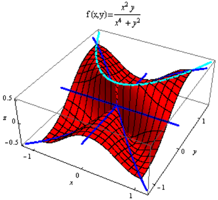


- Limite segundo retas do tipo $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^3}{(x^2+m^2)x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{x^2+m^2} = 0.$$

- Limite segundo a parábola de equação $y = x^2$.

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}.$$



Logo, não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Podemos mostrar, em alternativa ao uso da definição, que

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \ell,$$

usando a técnica de enquadramento descrita no resultado seguinte.

Teorema: *Seja $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ e sejam $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ funções tais que*

$$|f(\boldsymbol{x}) - \ell| \leq g(\boldsymbol{x}) \qquad \textit{e} \qquad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = 0.$$

Então

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \ell.$$

Exemplo Mostre que, se $f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}$, então existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

Notemos, por exemplo, que o limite ao longo da reta de equação $x=0$ é 0. Isto significa que, uma vez que o limite existe, este terá que ser 0.

Usando o teorema anterior e atendendo a que

$$|f(x,y)|=|y|\frac{x^2}{x^2+y^2}\leq |y|$$

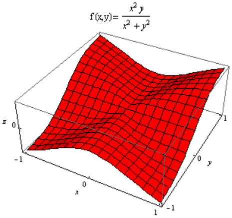
$\frac{x^2}{x^2+y^2}\leq 1$

e

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y|=0,$$

concluimos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}=0.$$



Teorema: *Seja* $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ *e sejam* $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ *funções tais que*

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \ell_1 \qquad \textit{e} \qquad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = \ell_2.$$

Então:

- $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} (f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})) = \ell_1 + \ell_2$;
- $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} (f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})) = \ell_1 \ell_2$;
- $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \dfrac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$, *se* $\ell_2 \neq 0$.

Definição Sejam $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{f} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$ e $\boldsymbol{a} \in \mathcal{D}'$. Diz-se que $\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \ldots, \ell_m)$ é o limite de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ quando $\boldsymbol{x}$ tende para $\boldsymbol{a}$ e escreve-se

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\ell},$$

se $\quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{D} \;\; 0 < ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}|| < \delta \Rightarrow ||\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\ell}|| < \varepsilon$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \quad \boldsymbol{f}(B(\boldsymbol{a}, \delta) \cap \mathcal{D} \setminus \{\boldsymbol{a}\}) \subseteq B(\boldsymbol{\ell}, \varepsilon).$$

Teorema: *Se* $\boldsymbol{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ \boldsymbol{x} & \mapsto & (f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_m(\boldsymbol{x})) \end{array}$ *então*

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\ell} \Leftrightarrow \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f_i(\boldsymbol{x}) = \ell_i, \; i = 1, \ldots, m.$$

Exemplo Considere a função definida por $\boldsymbol{f}(x,y,z)=(xe^{xz},x^2yz)$. Como

$$\lim_{(x,y,z)\to(-1,1,0)} xe^{xz}=-1 \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y,z)\to(-1,1,0)} x^2yz=0,$$

então

$$\lim_{(x,y,z)\to(-1,1,0)} \boldsymbol{f}(x,y,z)=(-1,0).$$

Definição Uma função $\boldsymbol{f}:\mathcal{D}\to\mathbb{R}^m$, $\mathcal{D}\subseteq\mathbb{R}^n$, diz-se **contínua** num ponto $\boldsymbol{a}\in\mathcal{D}$ se $\boldsymbol{a}$ é um ponto isolado ou

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}).$$

Uma função $\boldsymbol{f}$ diz-se **contínua**, se for contínua em todos os pontos do seu domínio.

Os resultados relativos à soma, produto e composta de funções contínuas de uma variável, são extensíveis, de forma natural, a funções de duas ou mais variáveis.

Exemplos

- A função

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

não é contínua na origem, porque não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ (ver p. 12).

- A função

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

é contínua na origem, porque

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$$

(ver p.14).