Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática

4. Extremos absolutos, locais e condicionados de funções escalares

fmiranda@math.uminho.pt

mif@math.uminho.pt

2023/2024

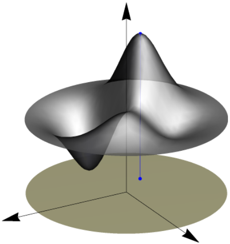
Máximos e Mínimos

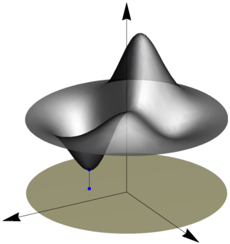
Seja $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in \mathcal{D}$.

Definição Diz-se que f tem um

- máximo (absoluto) no ponto a, se $f(x) \leq f(a),\ \forall x \in \mathcal{D}$; o ponto a diz-se ponto de máximo

- mínimo (absoluto) no ponto a, se $f(x) \geq f(a),\ \forall x \in \mathcal{D}$; o ponto a diz-se ponto de mínimo



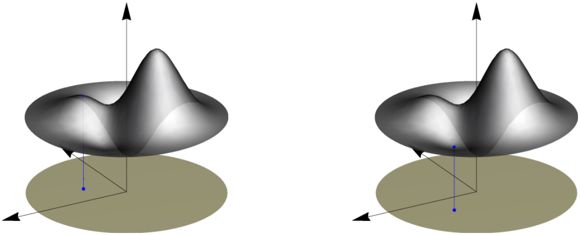


MÁXIMOS E MÍNIMOS LOCAIS

Seja $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in \mathcal{D}$.

Definição Diz-se que f tem um

- máximo local ou relativo no ponto a, se existir uma vizinhança V de a tal que $f(x) \leq f(a), \ \forall x \in V \cap \mathcal{D}$; o ponto a diz-se ponto de máximo local
- mínimo local ou relativo no ponto $\boldsymbol{a}$, se existir uma vizinhança V de a tal que $f(x) \geq f(a), \ \forall x \in V \cap \mathcal{D}$; o ponto $\boldsymbol{a}$ diz-se ponto de máximo local



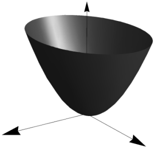
Pontos críticos

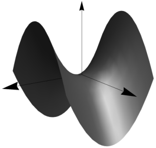
Definição Um ponto $a \in \mathcal{D}$ diz-se um ponto crítico de f se $\nabla f(a) = \mathbf{0}$ ou $\nabla f(a)$ não existe.

Exemplos: As funções $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ e $g(x,y) = x^2 - y^2$ têm um único ponto crítico: $(0,0)$.

Como $f(x,y) \geq f(0,0) = 0$, então $(0,0)$ é um ponto de mínimo de f.

Como $g(x,0) > g(0,0) = 0$, para $x \neq 0$ e $(g(0,y) < g(0,0) = 0$, para $y \neq 0$, no ponto crítico $(0,0)$ a função não tem máximo nem mínimo local.





Definição Um ponto crítico de uma função f diz-se um **ponto de sela** se não é ponto de máximo nem ponto de mínimo de f.

Teorema: *Seja $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}$. Se:*

- *f tem um extremo local em a,*
- *todas as derivadas parciais de f em a existem,*

então a é um ponto crítico de f.

Observação:

- Note-se que o recíproco do resultado anterior não é válido. Um ponto interior a pode ser um ponto de sela de f.
- Se a não for um ponto interior de $\mathcal{D}$, o resultado não é válido. A função f pode ter um extremo local num ponto que não é ponto crítico.

MATRIX HESSIANA

Definição Seja $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função nas variáveis $x_1, \dots, x_n$, de classe $\mathscr{C}^2$. A matriz hessiana de f em a é a matriz $n \times n$

$$\mathcal{H}f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

Observação: A matriz hessiana é uma matriz simétrica. Porquê?

Exemplo: Se $f(x,y) = x^3y + x^2y + y^4$, então

$$\mathcal{H}f(1,1) = \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$$

TESTE PARA EXTREMOS LOCAIS

Denotemos por $\mathcal{H}_k,\ k = 1, \ldots, n$ os menores principais de $\mathcal{H}f(a)$, isto é

$$\mathcal{H}_1 = \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) \right|,\ \mathcal{H}_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) \end{vmatrix}, \ldots, \mathcal{H}_n = |\mathcal{H}f(a)|$$

Teorema: *Sejam $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathscr{C}^2$ e $a \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}$ um ponto crítico de f tal que $\mathcal{H}_n \neq 0$. Se*

- *todos os determinantes $\mathcal{H}_k$ forem positivos, f tem um mínimo local em a;*
- *os determinantes $\mathcal{H}_k$ tiverem sinais alternados (começando com $\mathcal{H}_1 < 0$), f tem um máximo local em a;*
- *nenhuma das situações anteriores ocorrer, a é um ponto de sela.*

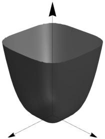
Corolário: *Sejam $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função nas variáveis x, y, de classe $\mathscr{C}^2$ e $a \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}$ um ponto crítico de f tal que $|\mathcal{H}f(a)| \neq 0$. Se*

- *$|\mathcal{H}f(a)| > 0$ e $f_{xx}(a) > 0$, então tem um mínimo local em a;*
- *$|\mathcal{H}f(a)| > 0$ e $f_{xx}(a) < 0$, então f tem um máximo local em a;*
- *$|\mathcal{H}f(a)| < 0$, então a é um ponto de sela.*

Se $|\mathcal{H}f(a)| = 0$ nada se pode concluir a partir do resultado anterior.

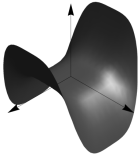
Exemplos: Em cada um dos seguintes casos, tem-se $|\mathcal{H}f(0,0)| = 0$:

$f(x,y) = x^4 + y^4$



$(0,0)$ é um ponto de mínimo de f

$g(x,y) = y^4 - x^4$

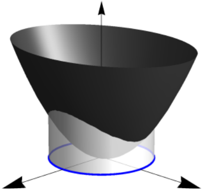


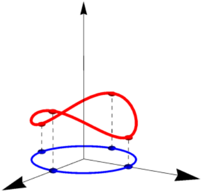
$(0,0)$ é ponto de sela de g

Máximos e Mínimos condicionados

Problema: Calcular os máximos e mínimos de uma função f restrita a um conjunto S.

Exemplo: Se $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ e $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, então $f_{|S}$ atinge o valor máximo 2 nos pontos $(0,-1)$ e $(0,1)$ e o valor mínimo 1 nos pontos $(1,0)$ e $(-1,0)$.





Existência de máximo e mínimo: Seja $\mathcal{D}$ um conjunto fechado e limitado em $\mathbb{R}^n$ e seja $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existe máximo e mínimo de f.

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Teorema de Lagrange Sejam $f, g : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ funções de classe $\mathscr{C}^1$. Seja $a \in \mathcal{D}$ um ponto tal que $g(a) = c$ e $\nabla g(a) \neq \mathbf{0}$. Se S é a curva de nível c da função g e $f_{|S}$ tem um extremo em a, então existe um número real λ tal que

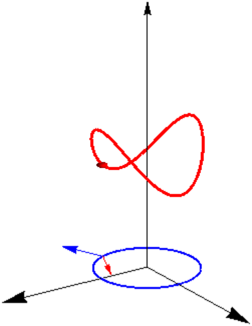
$$\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a).$$

O número λ chama-se multiplicador de Lagrange.

O teorema anterior diz que se a é um ponto de extremo de $f_{|S}$, então satisfaz

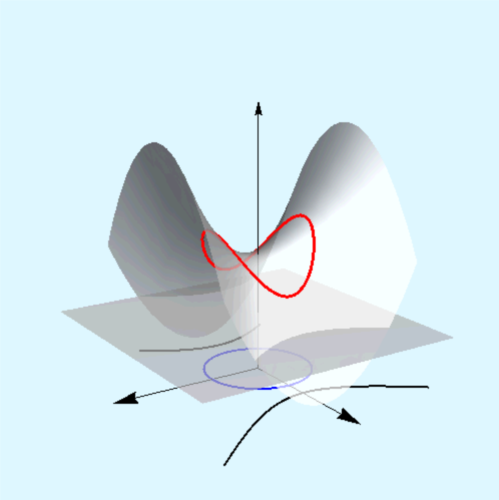
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(a) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(a) \\ g(a) = c \end{cases}$$

GEOMETRICAMENTE:



os pontos de extremo de $f_{|S}$ são os pontos onde os gradientes de f e g são colineares

GEOMETRICAMENTE:



os pontos de extremo de $f_{|S}$ são os pontos onde as curvas de nível de f são tangentes à curva de nível c de g

O Teorema de Lagrange apenas fornece candidatos a pontos de extremo de $f_{|S}$. Se S for fechado e limitado, então $f_{|S}$ tem máximo e mínimo (ver resultado da página 9) e os pontos de extremo de $f_{|S}$ obtêm-se avaliando a função f nos candidatos obtidos pelo método dos multiplicadores de Lagrange (MML).

Extremos condicionados de funções de mais de duas variáveis
A extensão método dos multiplicadores de Lagrange a funções de n variáveis é imediata.

Extremos de funções sujeitas a várias restrições

$$g_1(x,y)=c_1, g_2(x,y)=c_2 \ldots, g_k(x,y)=c_k$$

$$\nabla f(a)=\lambda_1 \nabla g_1(a)+\lambda_2 \nabla g_2(a)+\cdots+\lambda_k \nabla g_k(a).$$

Máximos e mínimos absolutos em $\mathcal{D}$

Se $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é contínua e $\mathcal{D}$ é um conjunto fechado e limitado, está garantida a existência de máximo e mínimo absolutos em $\mathcal{D}$ (ver resultado da página 9).

Estes extremos podem ocorrer no interior ou na fronteira de $\mathcal{D}$. Se ocorrem em $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$, então são pontos críticos; se ocorrem em $\partial\mathcal{D}$, podem ser obtidos pelo MML.

Cálculo dos extremos em $\mathcal{D}$ (fechado e limitado)

- calcular os pontos críticos de f; consideram-se apenas os que estão em $\mathcal{D}$;
- calcular os pontos de máximo e mínimo de f na fronteira, i.e. em $f_{|\partial\mathcal{D}}$;
- calcular o valor de f nesses pontos; o maior deles é o máximo; o menor é o mínimo.