Seja $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ um retângulo da forma $[a, b] \times [c, d]$. Uma partição de $\mathcal{R}$ de ordem $n$ é um conjunto de subretângulos da forma

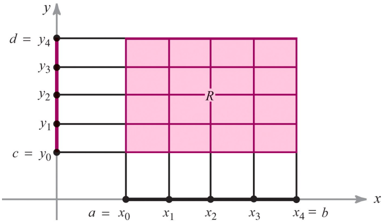
$$\mathcal{R}_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}];\ i, j = 0, \ldots, n-1,$$

onde

$$a = x_0 < x_1 \cdots < x_n = b \qquad \text{e} \qquad c = y_0 < y_1 \cdots < y_n = d$$

e

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n} \qquad \text{e} \qquad \Delta y = y_{i+1} - y_i = \frac{d-c}{n}$$



Seja $\mathcal{R}_{ij}$ um retângulo da forma $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ e seja $\boldsymbol{c}_{ij} \in \mathcal{R}_{ij}$.

Suponhamos que $f : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função limitada.

- A uma soma da forma

$$S_n = \sum_{i,j=0}^{n-1} f(\boldsymbol{c}_{ij}) \Delta x \Delta y.$$

  chama-se soma de Riemann de $f$.

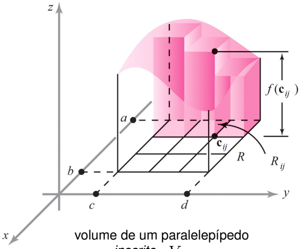
- Uma função $f$ diz-se integrável em $\mathcal{R}$ se existir o limite

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n$$

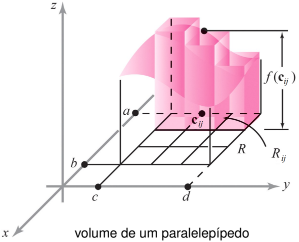
  e este limite for independente da escolha dos pontos $\boldsymbol{c}_{ij}$. Neste caso, $S$ escreve-se como

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y) d(x,y) \quad \text{ou} \quad \iint_{\mathcal{R}} f(x,y) dx\, dy \quad \text{ou} \quad \iint_{\mathcal{R}} f(x,y) dy\, dx$$

Se $f(x,y) \geq 0$, a existência de $\lim_{n\to\infty} S_n$ e a sua independência de $\boldsymbol{c}_{ij}$ tem uma interpretação geométrica imediata.




volume de um paralelepípedo
*inscrito* - $V_i$




volume de um paralelepípedo
*circunscrito* - $V_c$

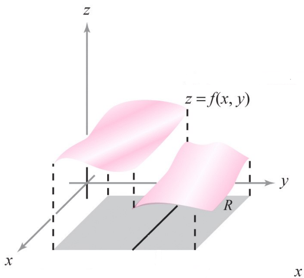
$$\lim_{n\to\infty} V_i = \lim_{n\to\infty} V_c$$

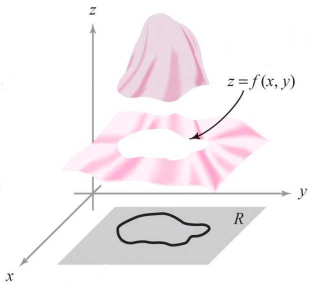
Volume do sólido limitado pela superfície $z = f(x,y)$

e pelos planos $z = 0, x = a, x = b, y = c, y = d$

Teorema: *Toda a função contínua definida num retângulo $\mathcal{R}$ é integrável em $\mathcal{R}$.*

Teorema: *Se $f$ é uma função limitada num retângulo $\mathcal{R}$ e se o conjunto de pontos onde $f$ é descontínua forma uma união finita de gráficos de funções contínuas, então $f$ é integrável em $\mathcal{R}$.*



## Propriedades

- Se $f$ e $g$ são funções integráveis num retângulo $\mathcal{R}$, então

$$\iint_{\mathcal{R}} \left(f(x,y)+g(x,y)\right)\, d(x,y) = \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, d(x,y) + \iint_{\mathcal{R}} g(x,y)\, d(x,y)$$

- Se $f$ é integrável num retângulo $\mathcal{R}$ e $c$ é uma constante, então

$$\iint_{\mathcal{R}} cf(x,y)\, d(x,y) = c\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, d(x,y)$$

- Se $f$ e $g$ são integráveis num retângulo $\mathcal{R}$ e $f(x,y) \geq g(x,y)$, então

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, d(x,y) \geq \iint_{\mathcal{R}} g(x,y)\, d(x,y)$$

- Se $f$ é integrável num retângulo $\mathcal{R}$, então $|f|$ é integrável em $\mathcal{R}$ e

$$\left|\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,d(x,y)\right| \le \iint_{\mathcal{R}} |f(x,y)|\,d(x,y)$$

- Sejam $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ retângulos tais que Int $(\mathcal{R}_1) \cap$ Int $(\mathcal{R}_2) = \emptyset$ e $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ é um retângulo. Se $f$ é integrável em $\mathcal{R}_1$ e em $\mathcal{R}_2$, então $f$ é integrável em $\mathcal{R}$ e

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,d(x,y) = \iint_{\mathcal{R}_1} f(x,y)\,d(x,y) + \iint_{\mathcal{R}_2} f(x,y)\,d(x,y)$$

## Teorema de Fubini

Seja $f$ uma função contínua num retângulo $\mathcal{R} = [a,b] \times [c,d]$. Então

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,d(x,y) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dx\,dy$$