Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

Análise Matemática EE

Teste 1 :: 18 março 2019

duração: 2 horas

Justifique, convenientemente, todas as suas respostas.

1. Indique, justificando, se as proposições seguintes são verdadeiras ou falsas:

a) Se $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^4+(x-y)^4}$, então $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$;

b) O plano tangente ao gráfico da função $f(x,y) = x^2 + (x-1)y + y^3$, no ponto $(0,1,0)$, é paralelo ao plano $x + y - z = 2$;

c) Não existe uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f_x(x,y) = x^2y + y^2$ e $f_y(x,y) = \frac{x^3}{3} + 2y$;

d) Se $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções de classe $\mathscr{C}^2$ e $h(x,y) = f(x+g(y))$, então $\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$.

2. Considere a função $\boldsymbol{f} : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\boldsymbol{f}(x,y) = \left(\dfrac{1}{\ln(1-x^2-(y+1)^2)}, \dfrac{x+y}{|2x|-1}\right)$.

a) Determine o domínio $\mathcal{D}$ da função $\boldsymbol{f}$ e represente-o graficamente.

b) Indique a aderência e a fronteira de $\mathcal{D}$.

c) Indique, justificando, se $\mathcal{D}$ é um conjunto aberto.

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} + 2y, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

a) Mostre que a função f é contínua em $(0,0)$.

b) Determine $\nabla f(0,0)$ e $\nabla f(0,1)$.

c) Calcule $Df\big((0,0);(1,1)\big)$.

d) Verifique se f é derivável em $(0,0)$.

4. Considere as funções $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tais que

$$f(x,y) = 1 - e^{x^2+2y^2-4} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{g}(x,y,z) = (x+yz, x\cos(y^2+4z)).$$

a) Descreva as curvas de nível da função f e represente graficamente a curva de nível que passa em $(0,2)$.

b) Calcule $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,2,-1)} \boldsymbol{g}(x,y,z)$.

c) Determine $D\boldsymbol{g}(1,2,-1)$.

d) Determine o vetor gradiente de $f \circ \boldsymbol{g}$ no ponto $(1,2,-1)$.

Cotação: **1.** 6 valores; **2.** 3 valores ; **3.** 6 valores ; **4.** 5 valores.