Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

Análise Matemática EE

Teste 1 :: 18 março 2019

duração: 2 horas

Justifique, convenientemente, todas as suas respostas.

1. Indique, justificando, se as proposições seguintes são verdadeiras ou falsas:

a) Se $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^4+(x-y)^4}$, então $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$;

Consideremos o limite ao longo da reta $y = x$. Como $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = 1 \neq 0$, a afirmação é FALSA.

b) O plano tangente ao gráfico da função $f(x,y) = x^2 + (x-1)y + y^3$, no ponto $(0,1,0)$, é paralelo ao plano $x + y - z = 2$;

Seja α o plano tangente ao gráfico da função f no ponto $(0,1,0)$ e seja β o plano $x+y-z = 2$. Notemos que $f(0,1) = 0$ e $\nabla f(0,1) = (1,2)$, logo uma equação do plano α é $x + 2y - z = 2$. O vetor $(1,1,-1)$ é perpendicular a β, mas não é perpendicular a α uma vez que $(1,1,-1)$ e $(1,2,-1)$ não são colineares; logo a afirmação é FALSA.

c) Não existe uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f_x(x,y) = x^2y + y^2$ e $f_y(x,y) = \frac{x^3}{3} + 2y$;

Suponhamos que existia uma função f nas condições indicadas. Esta função seria de classe C^∞, uma vez que as suas derivadas parciais são funções de classe C^∞. O teorema de Schwarz garantiria então que $f_{xy} = f_{yx}$. Mas $f_{xy} = x^2 + 2y$ e $f_{yx} = x^2$. Como, em geral,$f_{xy} \neq f_{yx}$, não existe tal função f; logo a afirmação é VERDADEIRA.

d) Se $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções de classe $\mathscr{C}^2$ e $h(x,y) = f(x + g(y))$, então $\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y} = \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$.

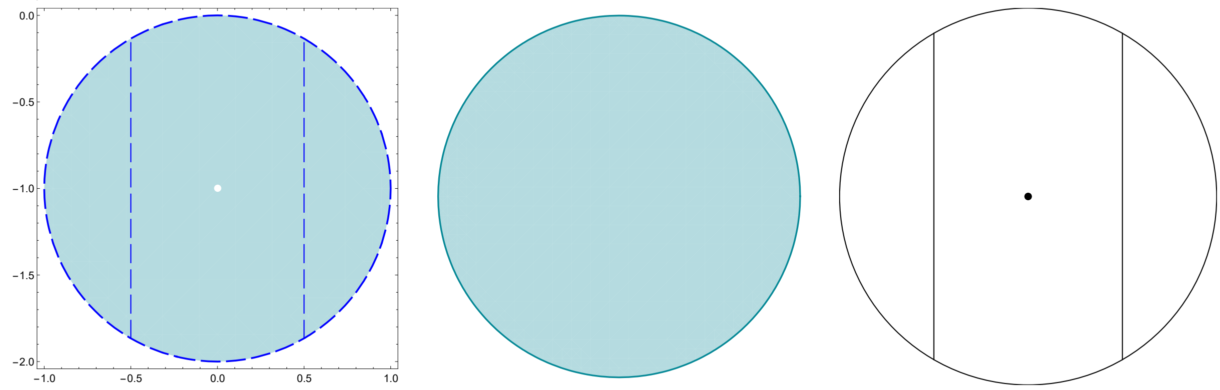
$\frac{\partial h}{\partial x} = f'(x+g(y))$; $\frac{\partial h}{\partial y} = g'(y)f'(x+g(y))$; $\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y} = g'(y)f''(x+g(y))$; $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = f''(x+g(y))$.
A afirmação é VERDADEIRA.

2. Considere a função $\boldsymbol{f} : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\boldsymbol{f}(x,y) = \left(\dfrac{1}{\ln(1-x^2-(y+1)^2)}, \dfrac{x+y}{|2x|-1}\right)$.

a) Determine o domínio $\mathcal{D}$ da função $\boldsymbol{f}$ e represente-o graficamente.

$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ln(1-x^2-(y+1)^2) \neq 0,\ 1 - x^2 - (y+1)^2 > 0,\ |2x| - 1 \neq 0\}$

b) Indique a aderência e a fronteira de $\mathcal{D}$.



$\mathcal{D}$ $\qquad$ $\overline{\mathcal{D}}$ $\qquad$ $\partial\mathcal{D}$

c) Indique, justificando, se $\mathcal{D}$ é um conjunto aberto.

É um conjunto aberto, porque $\overset{\circ}{\mathcal{D}} = \mathcal{D}$.

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} + 2y, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

a) Mostre que a função f é contínua em $(0,0)$.

$$\left| \frac{xy^3}{x^2+y^2} + 2y \right| \leq |xy| \frac{y^2}{x^2+y^2} + |2y| \leq |xy| + |2y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$

Logo, usando o teorema do enquadramento, conclui-se que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$.

b) Determine $\nabla f(0,0)$ e $\nabla f(0,1)$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$, $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 2$; logo $\nabla f(0,0) = (0,2)$.

Se $(x,y) \neq (0,0)$, $\nabla f(x,y) = \left(\frac{y^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, \frac{x(3x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^2} + 2 \right)$; logo $\nabla f(0,1) = (1,2)$.

c) Calcule $Df\big((0,0);(1,1)\big)$.

$Df\big((0,0);(1,1)\big) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,h)-f(0,0)}{h} = 2$.

d) Verifique se f é derivável em $(0,0)$.

f é derivável em $(0,0)$ sse

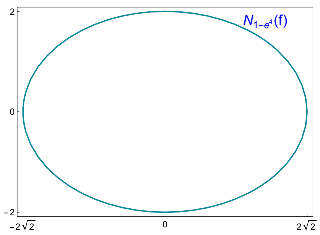
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0).(x,y)|}{||(x,y)||} = 0 \iff \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy^3|}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Como $\frac{|xy^3|}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = |x| \left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)^{\frac{3}{2}} \leq |x|$ e $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$, conclui-se usando o teorema do enquadramento que a função f é derivável em $(0,0)$.

4. Considere as funções $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tais que

$$f(x,y) = 1 - e^{x^2+2y^2-4} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{g}(x,y,z) = (x + yz, x\cos(y^2 + 4z)).$$

a) Descreva as curvas de nível da função f e represente graficamente a curva de nível que passa em $(0,2)$.



As curvas de nível c da função f são:
– elipses de equação $x^2 + 2y^2 = 4 + \ln(1-c)$, para $c < 1 - e^{-4}$;
– o ponto $(0,0)$, para $c = 1 - e^{-4}$;
– o conjunto vazio, para $c > 1 - e^{-4}$.
A curva de nível que passa em $(0,2)$ é a elipse $x^2 + 2y^2 = 8$, correspondente ao nível $c = 1 - e^4$.

b) Calcule $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,2,-1)} \boldsymbol{g}(x,y,z)$.

$\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,2,-1)} \boldsymbol{g}(x,y,z) = (-1,1)$

c) Determine $D\boldsymbol{g}(1,2,-1)$.

$$J\boldsymbol{g}(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & z & y \\ \cos\left(y^2+4z\right) & -2xy\,\text{sen}\left(y^2+4z\right) & -4x\,\text{sen}\left[y^2+4z\right] \end{bmatrix}.$$

$$J\boldsymbol{g}(1,2,-1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$D\boldsymbol{g}(1,2,-1) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x,y,z) = (x - y + 2z, x)$.

d) Determine o vetor gradiente de $f \circ \boldsymbol{g}$ no ponto $(1,2,-1)$.

$\nabla f \circ \boldsymbol{g}(1,2,-1) = \nabla f(\boldsymbol{g}(1,2,-1)) J\boldsymbol{g}(1,2,-1) = \nabla f(-1,1) J\boldsymbol{g}(1,2,-1)$,

$$\begin{bmatrix} 2e^{-1} & 4e^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{-1} & -2e^{-1} & 4e^{-1} \end{bmatrix},$$

$\nabla f \circ \boldsymbol{g}(1,2,-1) = \left(-\frac{2}{e}, -\frac{2}{e}, \frac{4}{e}\right)$.

Cotação: 1. 6 valores; **2.** 3 valores ; **3.** 6 valores ; **4.** 5 valores.