Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática

Análise Matemática EE

Teste 2 :: 6 junho 2019

duração: 2 horas

Nome: ______________________________ Número: __________

I

As respostas às perguntas deste grupo devem ser dadas no enunciado e no espaço reservado para o efeito.

1. Indique, justificando sucintamente, se as proposições seguintes são verdadeiras ou falsas:

a) O ponto $(0,0)$ é um ponto de sela da função $f(x,y) = e^{1+x^2-y^2}$;

b) A função $f(x,y) = x^3 - y^3$ tem um mínimo local no ponto $(0,0)$;

c) Se uma função f tem um máximo local em P, então P é um ponto crítico de f;

d) Se $\nabla f(P) = \mathbf{0}$, então f tem um extremo local no ponto P;

e) A função $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2x$ tem um mínimo no conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$;

f) A função $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2x$ tem um mínimo no conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

2. Responda às seguintes questões nos espaços indicados, sem apresentar os seus cálculos.

a) A área da região $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq 1 - x^2\}$ é dada pela expressão integral:

____ e tem o valor: ____________________

b) O integral $\int_0^1 \int_{-x^2}^{x} f(x, y) dy dx$ escreve-se, trocando a ordem de integração, como:

____

c) A mudança de variáveis $(u, v, w) = (x - y, \frac{x}{2}, z)$ permite escrever o integral $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^x f(x, y, z) dy dx dz$ como:

____

d) O volume do sólido $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2,\ 0 \leq z \leq 1\}$ pode exprimir-se, usando coordenadas esféricas, como:

____

II

As respostas às perguntas deste grupo devem ser dadas na folha de exame, justificando, convenientemente, todas as respostas.

1. Considere a função $f(x, y) = xy$, a curva C de equação $x^2 + y^2 = 2$ e o ponto $P = (1, 1)$.

a) Represente graficamente a curva C, as curvas de nível 1 e -1 de f e o ponto P.

b) Coloque no esboço efetuado na alínea anterior, um representante de $\nabla f(P)$ com origem em P.

c) Determine equações da reta normal e da reta tangente à curva de nível de f que passa em P.

d) Calcule os extremos da função f nos pontos da curva C, usando o método dos multiplicadores de Lagrange.

e) Diga como poderia obter o resultado da alínea anterior, usando argumentos geométricos e o esboço efetuado nas alíneas anteriores.

2. Considere o sólido $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 \leq z^2,\ 0 \leq z \leq \sqrt{3}\}$.

a) Faça um esboço do sólido, identificando as superficies envolvidas.

b) Escreva uma expressão integral que permita obter o volume de S, usando coordenadas cilíndricas.

c) Calcule o volume de S.

Cotação: $\boxed{\text{I}}$ **1.** 6 valores; **2.** 4 valores. $\boxed{\text{II}}$ **1.** 6 valores; **2.** 4 valores.