Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática

Análise Matemática EE

Teste 2 :: 6 junho 2019

duração: 2 horas

Nome: Soluções Número: ______

I

As respostas às perguntas deste grupo devem ser dadas no enunciado e no espaço reservado para o efeito.

1. Indique, justificando sucintamente, se as proposições seguintes são verdadeiras ou falsas:

a) O ponto $(0,0)$ é um ponto de sela da função $f(x,y) = e^{1+x^2-y^2}$; Verdadeira

$\nabla f(0,0) = (0,0) \Rightarrow (0,0)$ é um ponto crítico de f

$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 2e & 0 \\ 0 & -2e \end{bmatrix}$; $\det Hf(0,0) < 0 \Rightarrow (0,0)$ é ponto sela

b) A função $f(x,y) = x^3 - y^3$ tem um mínimo local no ponto $(0,0)$; Falsa

$f(0,0)=0$ . . . seja $(0,y), y>0$, um ponto na vizinhança de $(0,0)$. Como $f(0,y) < 0 = f(0,0)$, $(0,0)$ não é um minimizante local de f

c) Se uma função f tem um máximo local em P, então P é um ponto crítico de f; Falsa

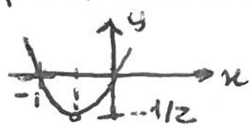
pag 4. slides

d) Se $\nabla f(P) = \mathbf{0}$, então f tem um extremo local no ponto P; Falsa

pag 4. slides

e) A função $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2x$ tem um mínimo no conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$; Verdadeira

$f(x,x) = 2x^2 + 2x$. Esta função tem um mínimo no ponto de abcissa 2.



f) A função $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2x$ tem um mínimo no conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Verdadeira

A função f é uma função contínua.
Como o conjunto é fechado e limitado, a função f restrita a este conjunto tem um máximo e um mínimo (pag. 8 slides)

2. Responda às seguintes questões nos espaços indicados, sem apresentar os seus cálculos.

a) A área da região $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq 1 - x^2\}$ é dada pela expressão integral:

$\int_{-1}^{1} \int_{-1+x^2}^{1-x^2} dy\,dx$ e tem o valor: $8/3$

b) O integral $\int_0^1 \int_{-x^2}^{x} f(x,y)\,dy\,dx$ escreve-se, trocando a ordem de integração, como:

$\int_{-1}^{0} \int_{\sqrt{-y}}^{1} f(x,y)\,dx\,dy + \int_0^1 \int_y^1 f(x,y)\,dx\,dy$

c) A mudança de variáveis $(u,v,w) = (x-y, \frac{x}{2}, z)$ permite escrever o integral $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^x f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz$ como:

$\int_0^1 \int_0^{1/2} \int_0^{2v} 2 f(2v, 2v-u, w)\,du\,dv\,dw$

d) O volume do sólido $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq z^2,\ 0 \leq z \leq 1\}$ pode exprimir-se, usando coordenadas esféricas, como:

$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\frac{1}{\cos\phi}} \rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

II

As respostas às perguntas deste grupo devem ser dadas na folha de exame, justificando, convenientemente, todas as respostas.

1. Considere a função $f(x,y) = xy$, a curva C de equação $x^2+y^2 = 2$ e o ponto $P = (1,1)$.

a) Represente graficamente a curva C, as curvas de nível 1 e -1 de f e o ponto P.

b) Coloque no esboço efetuado na alínea anterior, um representante de $\nabla f(P)$ com origem em P.

c) Determine equações da reta normal e da reta tangente à curva de nível de f que passa em P.

d) Calcule os extremos da função f nos pontos da curva C, usando o método dos multiplicadores de Lagrange.

e) Diga como poderia obter o resultado da alínea anterior, usando argumentos geométricos e o esboço efetuado nas alíneas anteriores.

2. Considere o sólido $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1,\ x^2+y^2 \leq z^2,\ 0 \leq z \leq \sqrt{3}\}$.

a) Faça um esboço do sólido, identificando as superficies envolvidas.

b) Escreva uma expressão integral que permita obter o volume de S, usando coordenadas cilíndricas.

c) Calcule o volume de S.

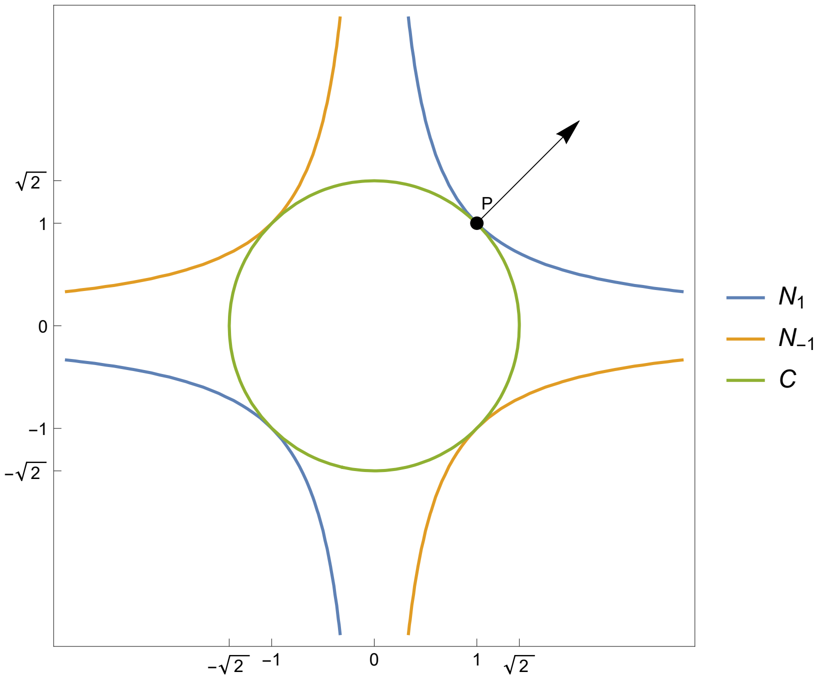
Cotação: $\boxed{\text{I}}$ **1.** 6 valores; **2.** 4 valores. $\boxed{\text{II}}$ **1.** 6 valores; **2.** 4 valores.

Grupo II

Questao 1

```
f[x_, y_] = x y;
```

a) b)



c)

Reta normal: (x,y)=(1,1)+λ(1,1), $\lambda \in \mathbb{R}$

```
y = x
```

Reta tangente: (x-1,y-1).(1,1)=0

```
y = 2 - x
```

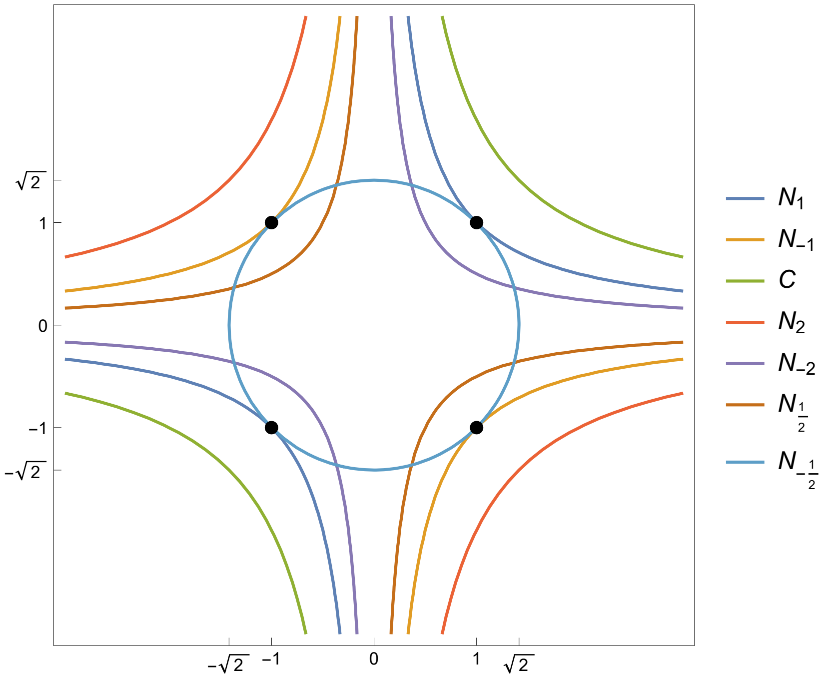
d)

A função f é contínua e a curva C é fechada e limitada, pelo que está garantida a existência de mínimo e máximo de f em C. Note-se ainda que o ponto crítico de f, i.e. (0,0) não pertence a C. Seja $g(x, y) = x^2 + y^2$. O sistema

$$\begin{cases} f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 2 \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} (y, x) = 2\lambda (x, y) \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

tem as soluções (-1,-1),(1,1),(-1,1),(1,-1). Como f (-1,-1)=f(1,1)=1 e f (-1,1)=f(1,-1)=-1, a função $f\mid_C$ tem máximo (1) nos pontos (-1,-1) e (1,1) e mínimo em (-1,1),(1,-1).

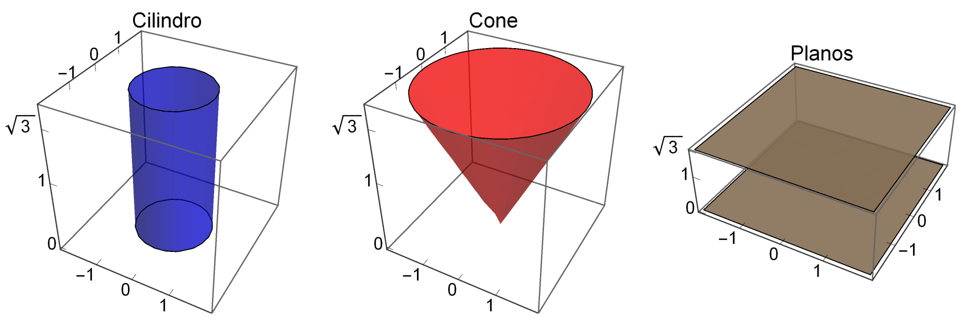
e)

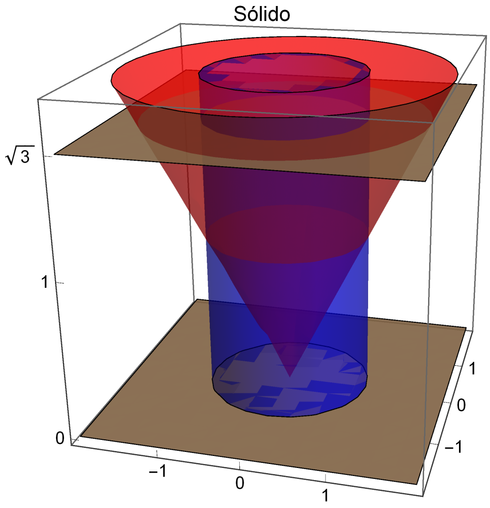


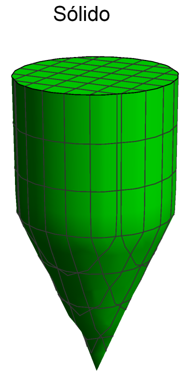
Facilmente se percebe que as únicas curvas de nível de f tangentes a C são as curvas de nível 1 e - 1, sendo os pontos de tangência os pontos assinalados na figura. Estão assim encontrados os pontos de extremos. Nos pontos situados na curva de nível 1, f toma o valor máximo 1 e nos situados na curva de nível -1 o valor mínimo -1. Ver pag. 11 dos slides.

Questao 2

a)







b)

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_\rho^{\sqrt{3}} \rho \, dz \, d\rho \, d\theta$$

c)

$$\left(-\frac{2}{3}+\sqrt{3}\right)\pi$$