Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática

Análise

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Teste 2 A :: 20 de maio de 2021

Nome

Número

I

As respostas às questões deste grupo devem ser convenientemente justificadas e devem ser dadas na folha de teste.

Questão 1. [3 valores] Sejam $\mathbf{\Phi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por $\mathbf{\Phi}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $\nabla f(1,\sqrt{3}) = (-2,3)$ e $F = f \circ \mathbf{\Phi}$.

a) Calcule $\nabla F\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$.

b) Determine os pontos do elipsoide $x^2 + 3y^2 + \frac{z^2}{2} = 1$, cujos planos tangentes são paralelos ao plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, \sqrt{3}, f(1,\sqrt{3}))$.

$\left[\text{Recorde que } \mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\right]$

Questão 2. [3 valores] Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 + 3$.

a) Determine e classifique os pontos críticos de f.

b) Justifique que f tem extremos absolutos na região $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ e determine-os.

Questão 3. [3 valores] Considere a seguinte soma de integrais duplos

$$S = \int_{-1}^{0}\int_{-y}^{1} e^{x^2}\,dx\,dy + \int_{0}^{2}\int_{\frac{y}{2}}^{1} e^{x^2}\,dx\,dy.$$

a) Faça um esboço da região de integração de cada integral que compõe S.

b) Invertendo a ordem de integração, escreva S num só integral duplo.

c) Calcule o valor de S.

Questão 4. [3 valores] Considere a região $\mathcal{R}$ definida por

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4 \text{ e } x^2 + (y-1)^2 \geq 1\}.$$

a) Faça um esboço da região $\mathcal{R}$;

b) Escreva um integral duplo, em coordenadas polares, que permita determinar a área da região $\mathcal{R}$.
[Não calcule o integral]

II

Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado a única afirmação verdadeira; não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

Questão 1. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que $(1, 2, 1)$ é um ponto crítico de f verificando

$$\text{Hess}f(1,2,1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Então o ponto $(1, 2, 1)$ é:

○ maximizante local de f; ○ ponto de sela de f;
○ minimizante local de f; ○ nada se pode concluir.

Questão 2. Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $\mathcal{R} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$.

Então $\iiint_{\mathcal{R}} f(x, y, z)d(x, y, z)$ é igual a

○ $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\int_{0}^{2-\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y,z)dzdydx$; ○ $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{z-2}^{2-z}\int_{-\sqrt{(z-2)^2-y^2}}^{\sqrt{(z-2)^2-y^2}} f(x,y,z)dxdydz$;

○ $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}}\int_{0}^{2-\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y,z)dzdxdy$; ○ $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{0}^{2-\sqrt{4+y^2}}\int_{-\sqrt{4-z^2+y^2}}^{\sqrt{4-z^2+y^2}} f(x,y,z)dxdzdy$.

Questão 3. As coordenadas polares do ponto $(1, 1)$ são:

○ $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{6})$; ○ $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$; ○ $(1, \frac{\pi}{4})$; ○ $(1, \frac{\pi}{6})$.

Questão 4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função derivável cujas curvas de nível (não vazias) são circunferências centradas na origem e seja $S = [-2, 2] \times \{0, 1\}$. Se $\max f(S) = f(2, 0)$, então

○ $\nabla f(0, 1) = (0, 0)$; ○ $\nabla f(2, 1) = (0, 0)$;
○ $\nabla f(\sqrt{3}, 1) = (0, 0)$; ○ $\nabla f(x, y) \neq (0, 0)$, $\forall (x, y) \in S$.

III

Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado, se a afirmação é falsa ou verdadeira; não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,5 valores.

V F

Questão 1. Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função que possui todas as derivadas parciais de segunda ordem em $(1, 2)$, então a matriz Hessiana de f em $(1, 2)$ é simétrica. ○ ○

Questão 2. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $D \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto fechado e limitado. Se $\max f(D) = \max f(\partial D)$ então $f(\mathring{D})$ é um conjunto majorado mas não tem máximo. ○ ○

Questão 3. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ uma função contínua e $D, R \subseteq \mathbb{R}^2$ fechados e limitados. Se $\iint_R f(x, y)d(x, y) \geq \iint_D f(x, y)d(x, y)$, então $\iint_R d(x, y) \geq \iint_D d(x, y)$. ○ ○

Questão 4. Se $\displaystyle\int_{-1}^{0}\int_{0}^{2} f(x, y)dydx = 3$ então $\displaystyle\int_{-1}^{0}\int_{0}^{2}(f(x, y) + 1)dydx = 5$. ○ ○