Teste 20/05/2021

I

Questão 2

$f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 + 3$

a) $\nabla f(x,y) = (2x-2, 2y)$

P^{tos} críticos: $\begin{cases} 2x-2=0 \\ 2y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ Apenas um p^{to} crítico: $(1,0)$

$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Hf(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Como $Hf(1,0) > 0$ e $f_{xx} = 2 > 0$, f tem um mínimo local em $(1,0)$

b) A região $\mathcal{R}_0$ é fechada e limitada, logo $f|_{\mathcal{R}_0}$ atinge em $\mathcal{R}_0$ máximo e mínimo.

Já sabemos, pela alínea a) que em $\mathring{\mathcal{R}}_0$, f tem um mínimo local. Vejamos o que se passa em

$\partial \mathcal{R}_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$

Seja $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4$ e determinemos, pelo método dos multiplicadores de Lagrange, os extremos de $f|_{\partial \mathcal{R}_0}$

$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-2 = 2x\lambda \\ 2y = 2y\lambda \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$ $\begin{cases} — \\ 2y(1-\lambda)=0 \\ — \end{cases}$ $\begin{cases} \\ y=0 \vee \lambda=1 \\ \end{cases}$

$\boxed{y=0}$ $\begin{cases} \lambda = \dots \\ — \\ x = \pm 2 \end{cases}$

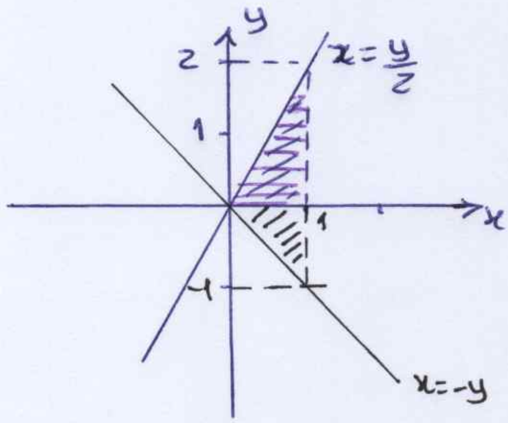
$\boxed{\lambda = 1}$ $\begin{cases} 2x-2 = 2x \text{ impossível} \\ \end{cases}$

Pontos: $(-2,0)$ e $(2,0)$

Como $f(-2,0) = 11$; $f(2,0) = 3$; $f(1,0) = 2$, então $(-2,0)$ é p^{to} de máximo e $(1,0)$ é p^{to} de mínimo.

Questão 3

a) $\boxed{\begin{array}{l} -y \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 0 \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{l} 0 \leq y \leq 2 \\ \frac{y}{2} \leq x \leq 1 \end{array}}$



b) $$\int_0^1 \int_{-x}^{2x} e^{x^2}\, dy\, dx$$

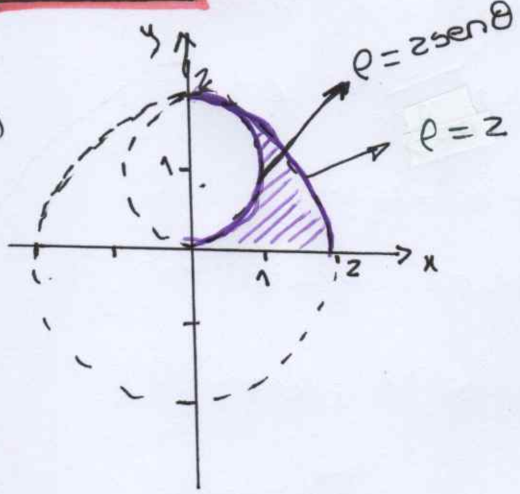
c) $$\int_0^1 \underbrace{\left[y e^{x^2} \right]_{y=-x}^{y=2x}}_{A} dx$$

$$A = 2xe^{x^2} + xe^{x^2} = 3xe^{x^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{3}{2} \cdot 2xe^{x^2} dx = \frac{3}{2} \left. e^{x^2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{3}{2}(e-1)$$

Questão 4

a)



$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 2y + \cancel{1} = \cancel{1}$$

$$\rho^2 - 2\rho\, sen\theta = 0$$

$$\cancel{\rho = 0} \vee \boxed{\rho = 2 sen\theta}$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$\rho^2 = 4 \Rightarrow \boxed{\rho = 2}$$

C. polares

$x = \rho\cos\theta$

$y = \rho\, sen\theta$

b) $$Área(\mathcal{R}_0) = \iint_{\mathcal{R}_0} d(x,y) = \int_0^{\pi/2} \int_{2sen\theta}^{2} \rho\, d\rho\, d\theta$$

II

Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado a única afirmação verdadeira; não deve apresentar qualquer justificação.

Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

Questão 1. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que $(1,2,1)$ é um ponto crítico de f verificando

$$\mathrm{Hess}f(1,2,1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Então o ponto $(1,2,1)$ é:

○ maximizante local de f; ● ponto de sela de f;

○ minimizante local de f; ○ nada se pode concluir.

Questão 2. Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $\mathcal{R} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2+y^2}\right\}$.

Então $\iiint_{\mathcal{R}} f(x,y,z)d(x,y,z)$ é igual a

○ $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\int_{0}^{2-\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y,z)dzdydx$; ● $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{z-2}^{2-z}\int_{-\sqrt{(z-2)^2-y^2}}^{\sqrt{(z-2)^2-y^2}} f(x,y,z)dxdydz$;

○ $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}}\int_{0}^{2-\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y,z)dzdxdy$; ○ $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{0}^{2-\sqrt{4+y^2}}\int_{-\sqrt{4-z^2+y^2}}^{\sqrt{4-z^2+y^2}} f(x,y,z)dxdzdy$.

Questão 3. As coordenadas polares do ponto $(1,1)$ são:

○ $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{6})$; ● $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$; ○ $(1, \frac{\pi}{4})$; ○ $(1, \frac{\pi}{6})$.

Questão 4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função derivável cujas curvas de nível (não vazias) são circunferências centradas na origem e seja $S = [-2,2] \times \{0,1\}$. Se $\max f(S) = f(2,0)$, então

○ $\nabla f(0,1) = (0,0)$; ○ $\nabla f(2,1) = (0,0)$;

● $\nabla f(\sqrt{3},1) = (0,0)$; ○ $\nabla f(x,y) \neq (0,0)$, $\forall (x,y) \in S$.

III

Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado, se a afirmação é falsa ou verdadeira; não deve apresentar qualquer justificação.

Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,5 valores.

	V	F
Questão 1. Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função que possui todas as derivadas parciais de segunda ordem em $(1,2)$, então a matriz Hessiana de f em $(1,2)$ é simétrica.	○	●
Questão 2. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $D \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto fechado e limitado. Se $\max f(D) = \max f(\partial D)$ então $f(\overset{\circ}{D})$ é um conjunto majorado mas não tem máximo.	○	●
Questão 3. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ uma função contínua e $D, R \subseteq \mathbb{R}^2$ fechados e limitados. Se $\iint_R f(x,y)d(x,y) \geq \iint_D f(x,y)d(x,y)$, então $\iint_R d(x,y) \geq \iint_D d(x,y)$.	○	●
Questão 4. Se $\int_{-1}^{0}\int_{0}^{2} f(x,y)dydx = 3$ então $\int_{-1}^{0}\int_{0}^{2} (f(x,y)+1)dydx = 5$.	●	○