Universidade do Minho (DMat)
Análise Matemática para Engenharia
Exame de recurso

EngInf
17 Jun 2023
Duração: 2h

Nome: Soluções

Número:

LEI ☐ MIEI ☐

Exame Completo (Partes 1A e 2A) ☐ Teste 1 (Partes 1A e 1B) ☐ Teste 2 (Partes 2A e 2B) ☐

Parte 1A

1. [4 val] Considere a função definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (a) Mostre que f é contínua no ponto $(0,0)$.

   $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$. Notar que $\dfrac{y^3}{x^2+y^2} = y\,\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$.

   (b) Calcule, se existir, $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$, para $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

   $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(hv_1, hv_2) - f(0,0)}{h} = \cdots = \dfrac{v_2^3}{v_1^2+v_2^2}$.

   (c) Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$.

   Da alínea anterior, resulta, com $v = (1,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$ e, com $v = (0,1)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 1$.

   (d) Estude a diferenciabilidade de f no ponto $(0,0)$.

   A função f não é diferenciável em $(0,0)$, porque, considerando, por exemplo, $v = (1,1)$, das alíneas (b) e (c), resulta

   $$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)}_{1/2} \neq v_1 \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}_{0} + v_2 \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}_{1}$$

2. [2.25 val] Considere a função definida por $f(x,y) = x^3 + y^4 - 27x + 32y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Determine os pontos críticos de f e especifique a sua natureza.

   O ponto $(-3,-2)$ é um ponto de sela de f e o ponto $(3,-2)$ é um minimizante local.

3. Sem justificar, indique o valor lógico das seguintes proposições.

Resposta correta: 0.75 Resposta em branco: 0 Resposta errada: -0.25

Cotação mínima: 0

	V	F
(a) Se $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 2$, então $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} f(x,y) = 4$.	☐	☒
(b) A função $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} y+1 & \text{se } y > x^3 \\ 1-x & \text{se } y \leq x^3 \end{cases}$ é contínua no ponto $(0,0)$ e descontínua no ponto $(1,1)$.	☒	☐
(c) Sejam $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Se $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existem e são contínuas em (a,b), então f é contínua em (a,b).	☒	☐
(d) Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3xy + 1$ e seja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $g(t) = f(\operatorname{sen} t, \cos t)$. Então $g'(0) = 1$.	☒	☐
(e) A superfície de nível 0 da função $f(x,y,z) = x^2 + 2y^3 - z$ é o gráfico da função $f(x,y) = x^2 + 2y^3$.	☒	☐

Parte 2A

1. [3.5 val] Considere o integral $\mathcal{I} = \displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \cos\left(y^3+1\right) dy\, dx$.

   (a) Esboce o domínio de integração de $\mathcal{I}$.

   (b) Calcule o valor de $\mathcal{I}$ invertendo a ordem de integração.

$$\mathcal{I} = \int_0^1 \int_0^{y^2} \cos(y^3+1)\, dx\, dy = \frac{1}{3}\big(\operatorname{sen}(2) - \operatorname{sen}(1)\big).$$

2. [2.75 val] Considere o sólido $\mathscr{S}$ que é limitado superiormente pela superfície esférica e inferiormente pela superfície cónica, cujas equações são, respetivamente,

$$x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4 \qquad \text{e} \qquad x^2 + y^2 = z^2.$$

Esboce o sólido $\mathscr{S}$ e estabeleça um integral triplo, em coordenadas cilíndricas ou esféricas, que permita determinar o seu volume.

Não calcule o valor do integral.

$$\operatorname{vol}(\mathscr{S}) = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_\rho^{2+\sqrt{4-\rho^2}} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{4\cos(\phi)} r^2 \operatorname{sen}(\phi)\, dr\, d\phi\, d\theta$$

3. Sem justificar, indique o valor lógico das seguintes proposições.

Resposta correta: 0.75 Resposta em branco: 0 Resposta errada: -0.25

Cotação mínima: 0

		V	F
(a)	A área da região em $\mathbb{R}^2$ delimitada pelas curvas $y = x^2 + 4$, $y = 1$, $x = 0$ e $x = 2$ é dada pelo integral $\displaystyle\int_0^2 \int_1^{x^2+4} 1\, dy\, dx$.	X	
(b)	Se f é integrável e $f(x, y) > 0$ para todo o $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, então $\displaystyle\int_0^1 \int_1^2 f(x, y)\, dy\, dx > 0$.	X	
(c)	A região, em coordenadadas cartesianas, $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \ \wedge \ y < 0\right\}$ é dada, em coordenadas polares, por $\left\{(\rho, \theta) : 1 \leq \rho \leq 9 \ \wedge \ \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi\right\}$.		X
(d)	Se $\mathcal{B} = [0, 2] \times [0, 1] \times [0, 1]$, então $\displaystyle\iiint_{\mathcal{B}} e^y \ d(x, y, z) = 2(e - 1)$.	X	
(e)	$(r, \theta, \phi) = \left(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ são as coordenadas esféricas do ponto cujas coordenadas cartesianas são $(x, y, z) = \left(1, 1, \sqrt{2}\right)$.	X	

Parte 1B

4. [3.5 val] Determine, se existirem, os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^3}{4x^3 + 2y^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+y}(2x^2 - 2y)}{\operatorname{sen}(x^2 - y)}$

(a) Não existe limite, basta observar que $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{x^3 - y^3}{4x^3 + 2y^2} = \lim_{y\to 0} -\frac{y}{2} = 0$

e $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x^3 - y^3}{4x^3 + 2y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+y}(2x^2 - 2y)}{\operatorname{sen}(x^2 - y)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2\, e^{x+y} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2 - y)}{\operatorname{sen}(x^2 - y)} = 2\, e^0 \cdot 1 = 2$

5. [2.75 val] Considere a função definida por $f(x, y) = 4x + 6y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Use o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar os extremos da função f restrita ao conjunto $\mathscr{C} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 13\right\}$.

Os candidatos a extremantes condicionados resultam apenas dos pontos críticos da função de Lagrange e são $(2, 3)$ para $\lambda = 1$ e $(-2, -3)$ para $\lambda = -1$. A função f atinge, sobre $\mathscr{C}$, o valor máximo 26 em $(2, 3)$ e o valor mínimo -26 em $(-2, -3)$.

6. Sem justificar, indique o valor lógico das seguintes proposições.

Resposta correta: 0.75 Resposta em branco: 0 Resposta errada: -0.25

Cotação mínima: 0

	V	F
(a) O conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\, x^2 + y^2 \leq 4 \;\wedge\; y \geq 0\}$ é limitado mas não é aberto.	[X]	[ ]
(b) Se $z(x,t) = \operatorname{sen}(x+2t)$, tem-se $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.	[X]	[ ]
(c) Se $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = v_1 v_2$, para todo o vetor $v = (v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, então f é derivável em $(0,0)$.	[ ]	[X]
(d) Sejam $f,g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(1,1) = 1$, $\nabla f(1,1) = (2,2)$ e $g(x,y) = \big[f(x,y)\big]^2$. Então, $\nabla g(1,1) = (4,4)$.	[X]	[ ]
(e) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = xy + y + 1$. O plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,1,3)$ passa pela origem.	[X]	[ ]

Parte 2B

4. [3.25 val] Considere o integral $\mathcal{J} = \displaystyle\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} y\, dy\, dx$.

   (a) Esboce a região de integração de $\mathcal{J}$.

   (b) Calcule $\mathcal{J}$ usando coordenadas polares.

$$\mathcal{J} = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \rho^2 \operatorname{sen}(\theta)\, d\theta\, d\rho = \frac{2}{3}$$

5. [3 val] Considere o integral $\mathcal{I} = \displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} (x^2+y^2)\, dz\, dy\, dx$.

   Use coordenadas cilíndricas para calcular o valor de $\mathcal{I}$.

$$\mathcal{I} = \int_0^1 \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\rho} \rho^3\, dz\, d\theta\, d\rho = \frac{\pi}{5}$$

6. Sem justificar, indique o valor lógico das seguintes proposições.

Resposta correta: 0.75 Resposta em branco: 0 Resposta errada: -0.25

Cotação mínima: 0

	V	F
(a) Se $f, g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ são integráveis e $f(x,y) \leq g(x,y)$ para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, então $\int_1^2 \int_0^2 \big[f(x,y) - g(x,y)\big]\, dy\, dx \leq 0.$	X	
(b) Se $f\colon [0,2] \times [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ é integrável, então $\int_0^2 \int_0^x f(x,y)\, dy\, dx = \int_0^2 \int_y^2 f(x,y)\, dx\, dy.$	X	
(c) Em coordenadas polares, a equação da circunferência $(x-1)^2 + y^2 = 4$ é $\rho = 2$.		X
(d) Considere o sólido $\mathcal{S} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 \leq z \leq 1\big\}$ e o integral $\mathcal{I} = \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^1 1\, dz\, dy\, dx$. O volume de $\mathcal{S}$ é igual a $\mathcal{I}$.		X
(e) A imagem do conjunto $\mathcal{D} = \big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2\colon\ v+u \geq 0,\ v-u \geq 0,\ v \leq 1\big\}$ segundo a transformação de variáveis definida por $x = \dfrac{u+v}{2}$ e $y = \dfrac{v-u}{2}$ é o conjunto $\mathcal{S} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\big\}$.	X	