Universidade do Minho (DMat)
Análise Matemática para Engenharia
Teste 2

EngInf
30/05/2023
Duração: 2 horas

Nome Soluções

Número

LEI MIEI

Grupo I – Apresente os cálculos que realizar e justifique as suas respostas. Responda na folha de teste.

1. [3.5 val] Considere o integral $\mathcal{I} = \displaystyle\int_0^2 \int_{y^2}^4 y e^{x^2}\, dx\, dy$.
   (a) Esboce o domínio de integração de $\mathcal{I}$.
   (b) Calcule o valor de $\mathcal{I}$ invertendo a ordem de integração.

$$\mathcal{I} = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} y e^{x^2}\, dy\, dx = \frac{1}{4}\left(e^{16} - 1\right).$$

2. [3.5 val] Considere a região definida por
$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1 \ \wedge\ y \geq x \ \wedge\ y \geq 0\right\}.$$
   (a) Esboce a região $\mathcal{D}$ e descreva-a usando coordenadas polares.
   (b) Calcule $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} \cos(x^2+y^2)\, d(x,y)$, usando coordenadas polares.

$$\iint_{\mathcal{D}} \cos(x^2+y^2)\, d(x,y) = \int_0^1 \int_{\pi/4}^{\pi} \rho \cos(\rho^2)\, d\theta\, d\rho = \frac{3\pi}{8}\,\mathrm{sen}(1)$$

3. [3.5 val] Considere o integral $\mathcal{I} = \displaystyle\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{1+x^2+y^2} \sqrt{x^2+y^2}\, dz\, dy\, d.$

   Use coordenadas cilíndricas para calcular o valor de $\mathcal{I}$.

$$\mathcal{I} = \int_0^2 \int_0^{\pi} \int_0^{1+\rho^2} \rho^2\, dz\, d\theta\, d\rho = \pi\left(\frac{8}{3} + \frac{32}{5}\right) = \frac{136}{15}\pi$$

4. [2 val] Seja $\mathcal{S}$ o sólido limitado superiormente pela superfície esférica $x^2+y^2+z^2 = 2$ e inferiormente pela superfície cónica $z^2 = x^2+y^2$, $z \geq 0$.

   Estabeleça, usando coordenadas esféricas, o integral $\mathcal{I} = \displaystyle\iiint_{\mathcal{S}} z\, d(x,y,z)$.

   Não calcule o valor do integral.

$$\mathcal{I} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{2}} r^3 \cos(\phi)\,\mathrm{sen}(\phi)\, dr\, d\phi\, d\theta$$

(v.s.f.f.)

Grupo II – Sem justificar, indique o valor lógico das seguintes proposições.

Resposta correta: 0.75 Resposta em branco: 0 Resposta errada: -0.25

Cotação mínima do grupo: 0

	V	F
1. O integral $\int_0^1 \int_{e^x}^{e} 1\, dy\, dx$ permite calcular a área da região em $\mathbb{R}^2$ delimitada pelas curvas $x = 0$, $y = e^x$ e $y = e$.	$\boxed{X}$	$\square$
2. Se $f\colon [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ é integrável, então $\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^y f(x,y)\, dx\, dy$.	$\square$	$\boxed{X}$
3. Se f é integrável e $f(x,y) > 0$ para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, então $\int_0^1 \int_{-x}^0 f(x,y)\, dy\, dx < 0$.	$\square$	$\boxed{X}$
4. Se $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ são integráveis e $f(x,y) \leq g(x,y)$ para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, então $\int_0^1 \int_1^2 \big[f(x,y) - g(x,y)\big]\, dy\, dx \leq 0$.	$\boxed{X}$	$\square$
5. A região, em coordenadas polares, $\big\{(\rho,\theta) : \ 1 \leq \rho \leq 2 \ \wedge \ 0 \leq \theta \leq \pi\big\}$ é dada, em coordenadadas cartesianas, por $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge \ x \geq 0\big\}$.	$\square$	$\boxed{X}$
6. Em coordenadas polares, a equação da circunferência $x^2 + (y-1)^2 = 1$ é $\rho = 1$.	$\square$	$\boxed{X}$
7. Se $\mathcal{B} = [0,2]\times[0,1]\times[1,2]$, então $\iiint_{\mathcal{B}} xy^2\ d(x,y,z) = \frac{2}{3}$.	$\boxed{X}$	$\square$
8. Considere o sólido $\mathcal{S} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \ z \geq 0\big\}$ e o integral $\mathcal{I} = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 1\, dz\, dy\, dx$. O volume de $\mathcal{S}$ é igual a $4\mathcal{I}$.	$\boxed{X}$	$\square$
9. O ponto cujas coordenadas cartesianas são $\big(1, \sqrt{3}, 2\big)$ tem coordenadas cilíndricas $\big(2, \frac{\pi}{3}, 2\big)$.	$\boxed{X}$	$\square$
10. Seja $\mathcal{I} = \iint_D \operatorname{sen}(x+y)\, d(x,y)$, onde $\mathcal{D} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \leq x-y \leq 0, \ -1 \leq x+y \leq 0\big\}$. Efetuando a mudança de variáveis definida por $u = x - y$ e $v = x + y$, obtemos $\mathcal{I} = \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \operatorname{sen}(v)\, du\, dv$.	$\square$	$\boxed{X}$