Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática

Análise Matemática para Engenharia

Licenciatura em Engenharia Informática

Exame A :: 4 de junho de 2024

Nome | Número

I

Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado, a afirmação verdadeira; não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

Questão 1. Considere a função $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ m, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Para que valores de m é esta função contínua?

- ○ $m = \frac{1}{2}$
- ○ $m = 0$
- ○ f é contínua para todo $m \in \mathbb{R}$
- ○ f é descontínua para todo $m \in \mathbb{R}$

Questão 2. Considere a função $f(x,y) = (xy, x^2 + xy^2)$. A derivada de f no ponto $(2,-1)$, segundo o vetor $(3,1)$ é

- ○ $(1,2)$
- ○ $(-1,11)$
- ○ $(-1,2)$
- ○ $(2,-11)$

Questão 3. Considere a função $g(x,y) = x^2 \operatorname{sen} y$. O plano tangente ao gráfico de g no ponto $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ interseta o plano $z = 0$ nos pontos pertencentes ao conjunto

- ○ $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\right\}$
- ○ $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = \frac{1}{2}, y = 0\right\}$
- ○ $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = \frac{1}{2}, z = 0\right\}$
- ○ $\left\{\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right)\right\}$

Questão 4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Se $z = f(y^2 - x^2, x^2 - y^2)$, então

- ○ $y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$
- ○ $y\frac{\partial z}{\partial x} - 2x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$
- ○ $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$
- ○ todas as afirmações anteriores são incorretas

Questão 5. A função $f(x,y) = \frac{1}{2}xy + \frac{2}{x} - \frac{1}{2}y^2$ tem:

- ○ um ponto crítico $(2,1)$ que é ponto de máximo
- ○ um ponto crítico $(2,1)$ que é ponto de mínimo
- ○ um ponto crítico $(2,1)$ que é ponto de sela
- ○ dois pontos críticos $(-2,1)$ e $(2,1)$

Questão 6. Considere a função $f(x,y) = x^2 + y^2$ e o conjunto $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\right\}$.

- ○ $f|_C$ atinge o mínimo em $(0,0)$ e não tem máximo
- ○ $f|_C$ atinge o máximo em $(0,\pm 3)$ e o mínimo em $(\pm 2, 0)$
- ○ $f|_C$ atinge o máximo em $(0,\pm 3)$ e o mínimo em $(0,0)$
- ○ todas as afirmações anteriores são incorretas

Questão 7. A área da região $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq 1 - x^2\}$ é dada por:

- ○ $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{x^2-1}^{1-x^2} dy\,dx$
- ○ $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} dy dx + \int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} dx\,dy$
- ○ $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{x^2+1}}^{\sqrt{x^2+1}} dx\,dy$
- ○ $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y+1}} dx\,dy$

Questão 8. Se $\displaystyle\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} y\,dz\,dy\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_a^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{3}{\operatorname{sen}\phi}} b\,dr\,d\phi\,d\theta$, então

- ○ $a = 0,\ b = r^2 \operatorname{sen}\phi$
- ○ $a = -\frac{\pi}{2},\ b = r^3 \operatorname{sen}^2\phi$
- ○ $a = \frac{\pi}{4},\ b = r^3 \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$
- ○ $a = \frac{\pi}{4},\ b = r^3 \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}\theta$

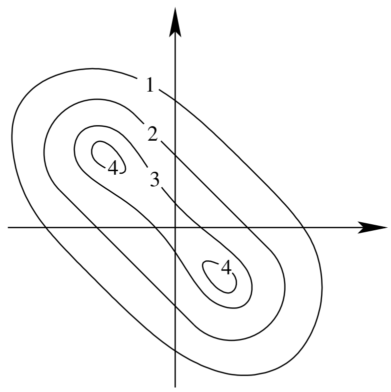
II

Responda às seguintes questões nos espaços indicados, sem apresentar os seus cálculos.

Questão 1. [2 valores] Seja D o domínio da função $g(x,y) = \dfrac{\ln y}{x-y}$.

O interior de D é .... e a aderência é ....

Questão 2. [1 valor] Na figura ao lado estão representadas algumas curvas de nível de uma função diferenciável f de duas variáveis. Assinale os pontos (a,b) da curva de nível 2 onde $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) \geq 0$.



Questão 3. [2 valores] Uma equação da reta normal ao hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 4$ no ponto $(2,1,-1)$ é

....

Questão 4. [1 valor] O ponto de coordenadas cartesianas $\left(1,-1,\sqrt{2}\right)$ tem coordenadas esféricas

....

As respostas às questões deste grupo devem ser convenientemente justificadas.

Questão 1. [3 valores] Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2 + y^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

a) Calcule $\nabla f(0,0)$.

b) Determine, caso exista, $Df\big((0,0);(1,-1)\big)$.

c) Verifique se f é derivável em $(0,0)$.

Questão 2. [3 valores] Considere o sólido

$$\mathcal{S} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z+1)^2 \leq 8,\ x^2 + y^2 \leq (z+1)^2,\ z \geq 0\right\}.$$

a) Faça um esboço de $\mathcal{S}$.

b) Escreva uma expressão integral que permita determinar o volume de $\mathcal{S}$, usando o sistema de coordenadas cilíndricas.