Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática

Análise Matemática para Engenharia

Licenciatura em Engenharia Informática

Exame A :: 4 de junho de 2024

Nome [ ] Número [ ]

I

Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado, a afirmação verdadeira; não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

Questão 1. Considere a função $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ m, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Para que valores de m é esta função contínua?

- ○ $m = \frac{1}{2}$
- ○ $m = 0$
- ○ f é contínua para todo $m \in \mathbb{R}$
- ● f é descontínua para todo $m \in \mathbb{R}$

Questão 2. Considere a função $f(x,y) = (xy, x^2 + xy^2)$. A derivada de f no ponto $(2,-1)$, segundo o vetor $(3,1)$ é

- ○ $(1,2)$
- ● $(-1,11)$
- ○ $(-1,2)$
- ○ $(2,-11)$

Questão 3. Considere a função $g(x,y) = x^2 \operatorname{sen} y$. O plano tangente ao gráfico de g no ponto $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ interseta o plano $z = 0$ nos pontos pertencentes ao conjunto

- ○ $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\right\}$
- ○ $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = \frac{1}{2}, y = 0\right\}$
- ● $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = \frac{1}{2}, z = 0\right\}$
- ○ $\left\{\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right)\right\}$

Questão 4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Se $z = f(y^2 - x^2, x^2 - y^2)$, então

- ● $y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$
- ○ $y\frac{\partial z}{\partial x} - 2x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$
- ○ $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$
- ○ todas as afirmações anteriores são incorretas

Questão 5. A função $f(x,y) = \frac{1}{2}xy + \frac{2}{x} - \frac{1}{2}y^2$ tem:

- ○ um ponto crítico $(2,1)$ que é ponto de máximo
- ○ um ponto crítico $(2,1)$ que é ponto de mínimo
- ● um ponto crítico $(2,1)$ que é ponto de sela
- ○ dois pontos críticos $(-2,1)$ e $(2,1)$

Questão 6. Considere a função $f(x,y) = x^2 + y^2$ e o conjunto $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\right\}$.

- ○ $f|_C$ atinge o mínimo em $(0,0)$ e não tem máximo
- ○ $f|_C$ atinge o máximo em $(0,\pm 3)$ e o mínimo em $(\pm 2, 0)$
- ● $f|_C$ atinge o máximo em $(0,\pm 3)$ e o mínimo em $(0,0)$
- ○ todas as afirmações anteriores são incorretas

Questão 7. A área da região $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq 1 - x^2\}$ é dada por:

- ● $\int_{-1}^{1} \int_{x^2-1}^{1-x^2} dy\,dx$
- ○ $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} dy dx + \int_{0}^{1} \int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} dx\,dy$
- ○ $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{x^2+1}}^{\sqrt{x^2+1}} dx\,dy$
- ○ $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y+1}} dx\,dy$

Questão 8. Se $\int_{0}^{3} \int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{0}^{\sqrt{x^2+y^2}} y\,dz\,dy\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{a}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{\frac{3}{\operatorname{sen}\phi}} b\,dr\,d\phi\,d\theta$, então

- ○ $a = 0,\ b = r^2 \operatorname{sen}\phi$
- ○ $a = -\frac{\pi}{2},\ b = r^3 \operatorname{sen}^2\phi$
- ○ $a = \frac{\pi}{4},\ b = r^3 \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$
- ● $a = \frac{\pi}{4},\ b = r^3 \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}\theta$

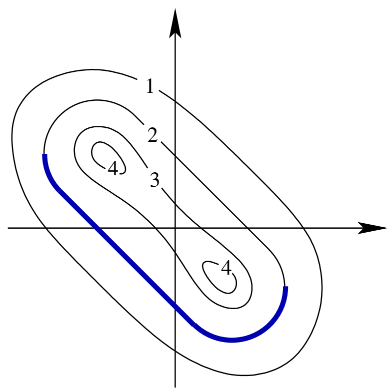
II

Responda às seguintes questões nos espaços indicados, sem apresentar os seus cálculos.

Questão 1. [2 valores] Seja D o domínio da função $g(x,y) = \dfrac{\ln y}{x-y}$.

O interior de D é $\mathring{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0,\ x \neq y\}$ e a aderência é $\overline{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$

Questão 2. [1 valor] Na figura ao lado estão representadas algumas curvas de nível de uma função diferenciável f de duas variáveis. Assinale os pontos (a,b) da curva de nível 2 onde $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) \geq 0$.



Questão 3. [2 valores] Uma equação da reta normal ao hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 4$ no ponto $(2,1,-1)$ é $(x,y,z) = (2,1,-1) + \lambda(4,2,2),\ \lambda \in \mathbb{R}$

Questão 4. [1 valor] O ponto de coordenadas cartesianas $\left(1,-1,\sqrt{2}\right)$ tem coordenadas esféricas $\left(2, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

As respostas às questões deste grupo devem ser convenientemente justificadas.

Questão 1. [3 valores] Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2+y^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

a) Calcule $\nabla f(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h^3} = 1.$$

Logo $\nabla f(0,0) = (0,1)$.

b) Determine, caso exista, $Df\big((0,0);(1,-1)\big)$.

$$Df\big((0,0);(1,1)\big) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^4-h^3}{2h^3} = \lim_{h\to 0} \frac{h-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

c) Verifique se f é derivável em $(0,0)$.

Se f fosse derivável em $(0,0)$, ter-se-ia $Df\big((0,0);(1,-1)\big) = \nabla f(0,0)\cdot(1,-1)$.

Pela alínea b), $Df\big((0,0);(1,-1)\big) = -\frac{1}{2}$

Pela alínea a), $\nabla f(0,0).(1,-1) = (0,1)\cdot(1,-1) = 1$.

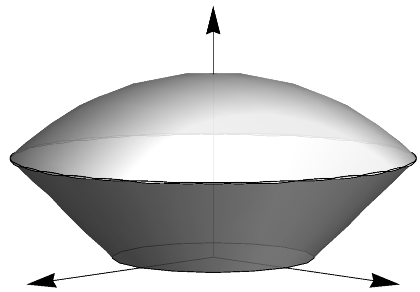
Logo f não é derivável em $(0,0)$.

Questão 2. [3 valores] Considere o sólido

$$\mathcal{S} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+(z+1)^2 \leq 8,\ x^2+y^2 \leq (z+1)^2,\ z \geq 0\right\}.$$

a) Faça um esboço de $\mathcal{S}$.

- $x^2+y^2+(z+1)^2 = 8$: esfera centrada em $(0,0,-1)$ e raio $2\sqrt{2}$;
- $x^2+y^2-(z+1)^2 = 0$: cone circular com vértice em $(0,0,-1)$
- $z = 0$: plano horizontal.



b) Escreva uma expressão integral que permita determinar o volume de $\mathcal{S}$, usando o sistema de coordenadas cilíndricas.

Usando coordenadas cilíndricas (ρ,θ,z):

- Esfera: $x^2+y^2+(z+1)^2 = 8 \longrightarrow \rho^2+z^2 = 8$
- Cone: $x^2+y^2-(z+1)^2 = 0 \longrightarrow \rho^2-(z+1)^2 = 0$
- Interseção da esfera com o cone:

$$\begin{cases} \rho^2+(z+1)^2 = 8 \\ \rho^2 = (z+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 = 4 \\ (z+1)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 2 \\ z = 1 \vee z = -3 \end{cases}$$

- Interseção do cone com o plano:

$$\begin{cases} \rho^2-(z+1)^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Volume de } \mathcal{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{8-\rho^2}-1} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta + \int_0^{2\pi}\int_1^2\int_{\rho-1}^{\sqrt{8-\rho^2}-1} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta$$