Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática

Análise Matemática para Engenharia

Licenciatura em Engenharia Informática

Teste 1 :: 2 de abril de 2024

Nome [ ] Número [ ]

I

Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado, a afirmação verdadeira; não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

Questão 1. Considere a função $f(x, y) = \operatorname{sen} \frac{1}{y} \ln \frac{1}{x}$. O domínio de f é

- ○ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0 \wedge -1 < x < 1\}$
- ○ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$
- ○ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0 \wedge x > 0\}$
- ○ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0 \wedge x \neq 0\}$

Questão 2. Seja $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(0, 0)\}$.

- ○ D é aberto
- ○ $(0, 0)$ é um ponto de isolado de D
- ○ D é fechado
- ○ $(0, 0)$ é um ponto de acumulação de D

Questão 3. A superfície de nível 0 da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4y - z + 5$ é

- ○ um cone com vértice em $(0, 2, 1)$
- ○ uma esfera com centro em $(0, 2, 1)$
- ○ um parabolóide com vértice em $(0, 2, 1)$
- ○ um parabolóide hiperbólico

Questão 4. Considere as funções $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + y^2 - x}$ e $g(x, y, z) = z - \dfrac{1}{1 + y^2 - x}$. O ponto $(1, 1, 1)$ pertence ao

- ○ gráfico de g
- ○ gráfico de f
- ○ conjunto de nível 1 de g
- ○ conjunto de nível 1 de f

Questão 5. O valor do $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - \operatorname{sen} y^2}{x^2 + y^2}$ é

- ○ 0
- ○ -1
- ○ 1
- ○ não existe

Questão 6. A função $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^n}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ é contínua em $(0, 0)$ se

- ○ $n = \frac{1}{2}$
- ○ $n = 1$
- ○ $n = \frac{3}{2}$
- ○ $n = 2$

Questão 7. A função $u(x,t) = \cos t \operatorname{sen} x$ satisfaz a equação

- ○ $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$
- ○ $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
- ○ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$
- ○ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Questão 8. Considere a função $f(x,y) = x^2 + \operatorname{sen}(xy)$. As direções segundo as quais a derivada direcional de f, no ponto $(1,0)$, toma o valor 1, são dadas pelos vetores

- ○ $(1,0)$ e $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
- ○ $(0,1)$ e $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$
- ○ $(0,1)$ e $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$
- ○ $(1,0)$ e $(0,1)$

Questão 9. Se $z = u^2 v$, $u = \operatorname{sen}(x-y)$ e $v = e^{x+y}$, então $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)$ é

- ○ $2\operatorname{sen}(x-y)e^{x+y} + \operatorname{sen}^2(x-y)$
- ○ $2\cos^2(x-y)e^{x+y}$
- ○ $2\operatorname{sen}(x-y)e^{x+y}$
- ○ $2\operatorname{sen}^2(x-y)e^{x+y}$

Questão 10. Considere uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derivável e tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y$. Qual das seguintes funções pode ser $\frac{\partial f}{\partial y}$?

- ○ $3x + 5y$
- ○ $3x + 2xy$
- ○ $2x + y^3$
- ○ não existe uma função nestas condições.

Questão 11. Considere a função $f(x,y,z) = (y + 2z, 3x + 4y + 5z)$. Então $Jf(1,0,1)$ é

- ○ $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
- ○ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
- ○ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$
- ○ $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

Questão 12. O plano tangente à superfície $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$ no ponto $(2,0,0)$ é

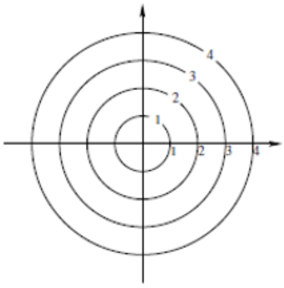
- ○ paralelo ao plano coordenado yOz
- ○ paralelo ao plano coordenado xOy
- ○ paralelo ao plano coordenado xOz
- ○ perpendicular ao vetor $(1,1,1)$

Questão 13. Sejam $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ uma função derivável e $(0,0) \in D$. Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(t) = f(\operatorname{sen} t, e^t - 1)$. Se o plano definido pela equação $x + y - z = -1$ é tangente ao gráfico de f em $(0,0)$, então

- ○ $f(0,0) = 1$ e nada se sabe sobre $g'(0)$
- ○ $f(0,0) = 1$ e $g'(0)$ não existe
- ○ $f(0,0) = 1$ e $g'(0) = 2$
- ○ $f(0,0) = 1$ e $g'(0) = 0$

As respostas às questões deste grupo devem ser convenientemente justificadas.

Questão 1. [3 valores] As circunferências centradas na origem representadas abaixo são as curvas de nível 1, 2, 3 e 4 de uma função derivável f.



a) O gráfico de f pode ser uma semiesfera centrada na origem?

b) Assinale no ponto $P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ um representante de um vetor com a direção e sentido do gradiente de f em P.

c) Indique se é verdade que $Df((0,2);(1,0)) > 0$.

d) Sabendo que $\|\nabla f(-3,0)\| = 1$ determine o plano tangente ao gráfico de f em $(-3,0)$.

Questão 2. [4 valores] Considere a função $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

a) Justifique que f é uma função contínua em $\mathbb{R}^2$.

b) Determine $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ para os quais existe $Df((0,0);(u,v))$.

c) Justifique que f não é uma função derivável na origem.