Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática

Análise Matemática para Engenharia

Licenciatura em Engenharia Informática

Teste 1 A :: 2 de abril de 2024

Nome | Número

I

Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado, a afirmação verdadeira; não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

Questão 1. Considere a função $f(x, y) = \operatorname{sen}\frac{1}{y}\ln\frac{1}{x}$. O domínio de f é

- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0 \wedge -1 < x < 1\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0 \wedge x > 0\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0 \wedge x \neq 0\}$

Questão 2. Seja $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(0, 0)\}$.

- D é aberto
- $(0, 0)$ é um ponto de isolado de D
- D é fechado
- $(0, 0)$ é um ponto de acumulação de D

Questão 3. A superfície de nível 0 da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4y - z + 5$ é

- um cone com vértice em $(0, 2, 1)$
- uma esfera com centro em $(0, 2, 1)$
- um parabolóide com vértice em $(0, 2, 1)$
- um parabolóide hiperbólico

Questão 4. Considere as funções $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + y^2 - x}$ e $g(x, y, z) = z - \dfrac{1}{1 + y^2 - x}$. O ponto $(1, 1, 1)$ pertence ao

- gráfico de g
- gráfico de f
- conjunto de nível 1 de g
- conjunto de nível 1 de f

Questão 5. O valor do $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - \operatorname{sen} y^2}{x^2 + y^2}$ é

- 0
- -1
- 1
- não existe

Questão 6. A função $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^n}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ é contínua em $(0, 0)$ se

- $n = \frac{1}{2}$
- $n = 1$
- $n = \frac{3}{2}$
- $n = 2$

Questão 7. A função $u(x,t) = \cos t \operatorname{sen} x$ satisfaz a equação

○ $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}$ ○ $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

○ $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial x}$ ● $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Questão 8. Considere a função $f(x,y) = x^2 + \operatorname{sen}(xy)$. As direções segundo as quais a derivada direcional de f, no ponto $(1,0)$, toma o valor 1, são dadas pelos vetores

○ $(1,0)$ e $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ ○ $(0,1)$ e $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

● $(0,1)$ e $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$ ○ $(1,0)$ e $(0,1)$

Questão 9. Se $z = u^2 v$, $u = \operatorname{sen}(x-y)$ e $v = e^{x+y}$, então $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)$ é

○ $2\operatorname{sen}(x-y)e^{x+y} + \operatorname{sen}^2(x-y)$ ○ $2\cos^2(x-y)e^{x+y}$

○ $2\operatorname{sen}(x-y)e^{x+y}$ ● $2\operatorname{sen}^2(x-y)e^{x+y}$

Questão 10. Considere uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derivável e tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y$. Qual das seguintes funções pode ser $\frac{\partial f}{\partial y}$?

● $3x + 5y$ ○ $3x + 2xy$

○ $2x + y^3$ ○ não existe uma função nestas condições.

Questão 11. Considere a função $f(x,y,z) = (y + 2z, 3x + 4y + 5z)$. Então $Jf(1,0,1)$ é

○ $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ ● $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

○ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ ○ $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

Questão 12. O plano tangente à superfície $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$ no ponto $(2,0,0)$ é

● paralelo ao plano coordenado yOz ○ paralelo ao plano coordenado xOy

○ paralelo ao plano coordenado xOz ○ perpendicular ao vetor $(1,1,1)$

Questão 13. Sejam $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ uma função derivável e $(0,0) \in D$. Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(t) = f(\operatorname{sen} t, e^t - 1)$. Se o plano definido pela equação $x + y - z = -1$ é tangente ao gráfico de f em $(0,0)$, então

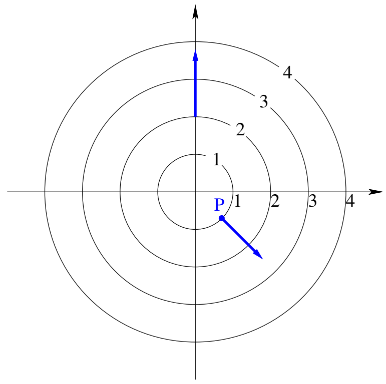
○ $f(0,0) = 1$ e nada se sabe sobre $g'(0)$ ○ $f(0,0) = 1$ e $g'(0)$ não existe

● $f(0,0) = 1$ e $g'(0) = 2$ ○ $f(0,0) = 1$ e $g'(0) = 0$

II

As respostas às questões deste grupo devem ser convenientemente justificadas.

Questão 1. [3 valores] As circunferências centradas na origem representadas abaixo são as curvas de nível 1, 2, 3 e 4 de uma função derivável f.



a) O gráfico de f pode ser uma semiesfera centrada na origem?

b) Assinale no ponto $P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ um possível representante do gradiente de f em P.

c) Indique se é verdade que $Df((0,2);(1,0)) > 0$.

d) Sabendo que $\|\nabla f(-3,0)\| = 1$ determine o plano tangente ao gráfico de f em $(-3,0)$.

Questão 2. [4 valores] Considere a função $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

a) Justifique que f é uma função contínua em $\mathbb{R}^2$.

b) Determine $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ para os quais existe $Df((0,0);(u,v))$.

c) Justifique que f não é uma função derivável na origem.

Questão 1.

a) Uma vez que as curvas de nível não vazias estão associadas a valores positivos, a semiesfera teria de ser superior. Assim sendo, considerando que a semiesfera tem raio $r > 0$, as curvas de nível $\lambda, 0 < \lambda \leq r$ seriam circunferências centradas na origem de raio $\sqrt{r^2 - \lambda^2}$, i.e., à medida que λ aumenta, o raio da circunferência diminui. Na figura acontece exatamente o contrário. Observe-se que as curvas de nível apresentadas são compatíveis com o gráfico da função ser uma superfície cónica, mas não tem de ser!

b) (ver figura)

c) $Df((0,2);(1,0)) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,2)$. Uma vez que $\nabla f(0,2)$ é normal à curva de nível que passa no ponto $(0,2)$ (ver figura), $\frac{\partial f}{\partial x}(0,2) = 0$.

d) $\nabla f(-3,0)) = (-1,0)$ e $f(-3,0) = 3$.
A equação do plano tangente ao gráfico de f em $(-3,0)$ é

$$z = f(-3,0) + f_x(-3,0)(x+3) + f_y(-3,0)y,$$

ou seja, $z = 3 - x - 3 \Leftrightarrow z = -x$.

Questão 2.

a) Para $(x,y) \neq (0,0)$ f é contínua, uma vez que é definida, numa vizinhança de (x,y), como o quociente de polinómios.
Quanto à continuidade de f em $(0,0)$, observando que

$$0 \leq \left|\frac{x^2y - y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|x^2y|}{x^2+y^2} + \frac{|y^3|}{x^2+y^2} \leq \frac{|x^2y|}{x^2} + \frac{|y^3|}{y^2} = 2|y|,$$

por enquadramento conclui-se que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, logo f também é contínua em $(0,0)$.

b)

$$(u,v)=(0,0)\Rightarrow Df((0,0);(u,v))=Df((0,0);(0,0))=0.$$

$$\begin{aligned}(u,v)\neq(0,0)\Rightarrow Df((0,0);(u,v)) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h(u,v))-f(0,0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h^3u^2v-h^3v^3}{h^3(u^2+v^2)}=\lim_{h\to 0}\frac{u^2v-v^3}{u^2+v^2}=\frac{u^2v-v^3}{u^2+v^2}.\end{aligned}$$

Então

$$Df((0,0);(u,v))=f(u,v)\quad \forall (u,v)\in\mathbb{R}^2.$$

c) Se f fosse derivável na origem ter-se-ia $Df(0,0)(u,v)=Df((0,0);(u,v))$. Como observado na alínea anterior, $Df((0,0);(u,v))=f(u,v)$ e f não é linear, logo f não é derivável na origem.

– ou –

Se f fosse derivável em $(0,0)$ ter-se-ia

$$Df(0,0)(u,v)=\nabla f(0,0)\cdot(u,v)=Df((0,0);(u,v)).$$

Pela alínea anterior, $f_x(0,0)=Df((0,0);(1,0))=0$ e $f_y(0,0)=Df((0,0);(0,1))=-1$, logo $\nabla f(0,0)=(0,-1)$. Dado $(u,v)\neq(0,0)$,

$$\begin{aligned}\nabla f(0,0)\cdot(u,v) &= Df((0,0);(u,v))\\ (0,-1)\cdot(u,v) &= f(u,v)\\ -v &= \frac{u^2v-v^2}{u^2+v^2}\end{aligned}$$

o que é, em geral, falso.