Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática

Análise Matemática para Engenharia

Licenciatura em Engenharia Informática

Teste 2 A :: 14 de maio de 2024

Nome

Número

I

Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado, a afirmação verdadeira; não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

Questão 1. Os pontos críticos da função $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^3$ são

- ○ $(0,0)$ e $\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$
- ○ $(0,0)$, $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ e $\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$
- ○ $(0,0)$ e $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$
- ○ $(0,0)$, $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

Questão 2. Considere a função $f(x,y) = \frac{3}{2}x^2 - xy^2 + \frac{1}{2}y^2$. O ponto $(0,0)$

- ○ é um minimizante local de f
- ○ é um ponto de sela de f
- ○ é um maximizante local de f
- ○ não é ponto crítico de f

Questão 3. Considere a função $f(x,y) = x^2 + y^2 - 5xy$ e o conjunto $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. A função f restrita ao conjunto C

- ○ tem um valor máximo, mas não tem um valor mínimo
- ○ tem um valor máximo e tem um valor mínimo
- ○ não tem um valor máximo, mas tem um valor mínimo
- ○ não tem um valor máximo nem tem um valor mínimo

Questão 4. Sejam $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funções de classe $\mathscr{C}^1$. Sabe-se que existe mínimo de f quando restrita à curva $g(x,y) = 0$ e que esse mínimo é atingido em pontos do conjunto $\{P_0, P_1, P_2\}$. Sabe-se também que

$$\begin{array}{lll} \nabla f(P_0) = (3,-1) & \nabla f(P_1) = (1,0) & \nabla f(P_2) = (2,1) \\ \nabla g(P_0) = (-1, \frac{1}{3}) & \nabla g(P_1) = (0,1) & \nabla g(P_2) = (-1,-2) \end{array}$$

Podemos concluir que o mínimo de f é atingido em

- ○ P_2
- ○ P_0 e P_2
- ○ P_0
- ○ P_1 e P_2

Questão 5. Seja D o quadrado cujos vértices são $(\pm a, \pm a)$, $a > 0$. Se $I = \iint_D xy\, d(x,y)$, então

- ○ $I = 0$
- ○ $I = 2\int_0^a \int_0^a xy\, dx dy$
- ○ $I = 4\int_0^a \int_0^a xy\, dx dy$
- ○ $I = 4a^2$

Questão 6. O integral $\int_0^1 \int_{-x^2}^{x} f(x,y)\, dy dx$ pode escrever-se como

○ $\int_{-x^2}^{x} \int_0^1 f(x,y)\, dx dy$

○ $\int_{-1}^{0} \int_{-\sqrt{-y}}^{1} f(x,y)\, dx dy + \int_0^1 \int_y^1 f(x,y)\, dx dy$

○ $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\, dx dy$

○ $\int_{-1}^{0} \int_{\sqrt{-y}}^{1} f(x,y)\, dx dy + \int_0^1 \int_y^1 f(x,y)\, dx dy$

Questão 7. O ponto de coordenadas cilíndricas $(\rho, \theta, z) = \left(1, \frac{3\pi}{4}, 1\right)$ tem coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

○ $\left(1, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ ○ $\left(1, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ ○ $\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ ○ $\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$

Questão 8. Seja $\mathcal{V} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le z^2,\ 0 \le z \le 1\right\}$ e $I = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{z + \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\, d(x,y,z)$. Então I pode ser escrito em coordenadas esféricas como

○ $\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\cos\phi}} (\operatorname{sen}\phi \cos\phi + \cos^2\phi)\, dr d\phi d\theta$

○ $\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\cos\phi}} (\operatorname{sen}\phi \cos\phi + \operatorname{sen}^2\phi)\, dr d\phi d\theta$

○ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{\cos\phi}} (\cos^2\phi \operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}^2\phi)\, dr d\theta d\phi$

○ $\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{1}{\cos\phi}} (\operatorname{sen}\phi \cos\phi + \operatorname{sen}^2\phi)\, dr d\phi d\theta$

II

Responda às seguintes questões nos espaços indicados, sem apresentar os seus cálculos.

Questão 1. [1 valor] Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função derivável cujas curvas de nível não vazias são circunferências centradas na origem e seja $S = \{1\} \times [-1, 1]$. Sabendo que $f(S) = [1, 2]$, $f(1,1)=2$ e $\nabla f(1, y) \neq (0,0)$, $\forall y \in \mathbb{R}$, indique o máximo e o mínimo de $f_{|_S}$ e as coordenadas dos pontos onde são atingidos.

Questão 2. [1.5 valores] Apresente um esboço da região cuja área é dada pelo integral $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \int_0^{2\operatorname{sen}\theta} \rho\, d\rho d\theta$.

Questão 3. [1.5 valores] O volume do sólido cónico delimitado pelas superfícies $z^2 = 4$ e $z^2 = y^2 + x^2$ pode exprimir-se, em coordenadas cilíndricas, pela expressão integral

----

Questão 4. [2 valores] Considere a região R do espaço que se encontra no interior do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e é limitada pelos paraboloides $z = x^2 + y^2$ e $z = -(x^2 + y^2)$. Exprima o volume desta região:

a) usando integrais duplos --

b) usando integrais triplos (coordenadas cilíndricas) --

III

As respostas às questões deste grupo devem ser convenientemente justificadas.

Questão 1. [3 valores] Determine e classifique os pontos críticos da função $f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$.

Questão 2. [3 valores] Considere a região $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 - 1, y \leq 1 - x, y \leq x + 1\}$.

a) Esboce a região $\mathcal{D}$.

b) Calcule a área de $\mathcal{D}$ usando integrais duplos.