Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática

Análise Matemática para Engenharia

Licenciatura em Engenharia Informática

Teste 2 A :: 14 de maio de 2024

Nome ____________________ Número __________

I

Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado, a afirmação verdadeira; não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

Questão 1. Os pontos críticos da função $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^3$ são

- ● $(0,0)$ e $\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$
- ○ $(0,0)$, $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ e $\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$
- ○ $(0,0)$ e $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$
- ○ $(0,0)$, $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

Questão 2. Considere a função $f(x,y) = \frac{3}{2}x^2 - xy^2 + \frac{1}{2}y^2$. O ponto $(0,0)$

- ● é um minimizante local de f
- ○ é um ponto de sela de f
- ○ é um maximizante local de f
- ○ não é ponto crítico de f

Questão 3. Considere a função $f(x,y) = x^2 + y^2 - 5xy$ e o conjunto $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. A função f restrita ao conjunto C

- ○ tem um valor máximo, mas não tem um valor mínimo
- ● tem um valor máximo e tem um valor mínimo
- ○ não tem um valor máximo, mas tem um valor mínimo
- ○ não tem um valor máximo nem tem um valor mínimo

Questão 4. Sejam $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funções de classe $\mathscr{C}^1$. Sabe-se que existe mínimo de f quando restrita à curva $g(x,y) = 0$ e que esse mínimo é atingido em pontos do conjunto $\{P_0, P_1, P_2\}$. Sabe-se também que

$$\begin{array}{lll} \nabla f(P_0) = (3,-1) & \nabla f(P_1) = (1,0) & \nabla f(P_2) = (2,1) \\ \nabla g(P_0) = (-1,\frac{1}{3}) & \nabla g(P_1) = (0,1) & \nabla g(P_2) = (-1,-2) \end{array}$$

Podemos concluir que o mínimo de f é atingido em

- ○ P_2
- ○ P_0 e P_2
- ● P_0
- ○ P_1 e P_2

Questão 5. Seja D o quadrado cujos vértices são $(\pm a, \pm a)$, $a > 0$. Se $I = \iint_D xy\, d(x,y)$, então

- ● $I = 0$
- ○ $I = 2\int_0^a \int_0^a xy\, dx dy$
- ○ $I = 4\int_0^a \int_0^a xy\, dx dy$
- ○ $I = 4a^2$

Questão 6. O integral $\int_0^1 \int_{-x^2}^{x} f(x,y)\,dy\,dx$ pode escrever-se como

○ $\int_{-x^2}^{x} \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy$ ○ $\int_{-1}^{0} \int_{-\sqrt{-y}}^{1} f(x,y)\,dx\,dy + \int_0^1 \int_y^1 f(x,y)\,dx\,dy$

○ $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy$ ● $\int_{-1}^{0} \int_{\sqrt{-y}}^{1} f(x,y)\,dx\,dy + \int_0^1 \int_y^1 f(x,y)\,dx\,dy$

Questão 7. O ponto de coordenadas cilíndricas $(\rho, \theta, z) = \left(1, \frac{3\pi}{4}, 1\right)$ tem coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

○ $\left(1, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ ○ $\left(1, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ ● $\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ ○ $\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$

Questão 8. Seja $\mathcal{V} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le z^2,\ 0 \le z \le 1\right\}$ e $I = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{z + \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\, d(x,y,z)$. Então I pode ser escrito em coordenadas esféricas como

○ $\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\cos\phi}} (\operatorname{sen}\phi\cos\phi + \cos^2\phi)\,dr\,d\phi\,d\theta$ ● $\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\cos\phi}} (\operatorname{sen}\phi\cos\phi + \operatorname{sen}^2\phi)\,dr\,d\phi\,d\theta$

○ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{\cos\phi}} (\cos^2\phi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}^2\phi)\,dr\,d\theta\,d\phi$ ○ $\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{1}{\cos\phi}} (\operatorname{sen}\phi\cos\phi + \operatorname{sen}^2\phi)\,dr\,d\phi\,d\theta$

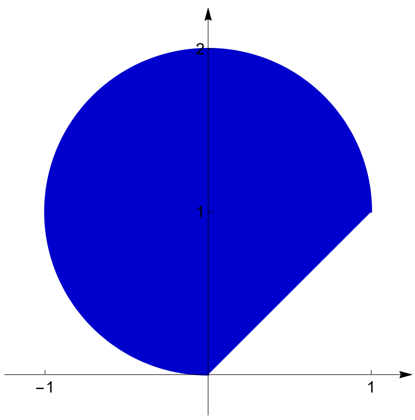
II

Responda às seguintes questões nos espaços indicados, sem apresentar os seus cálculos.

Questão 1. [1 valor] Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função derivável cujas curvas de nível não vazias são circunferências centradas na origem e seja $S = \{1\} \times [-1,1]$. Sabendo que $f(S) = [1,2]$, $f(1,1) = 2$ e $\nabla f(1,y) \neq (0,0)$, $\forall y \in \mathbb{R}$, indique o máximo e o mínimo de $f_{|_S}$ e as coordenadas dos pontos onde são atingidos.

O máximo é 2 e é atingido nos pontos $(1,-1)$ e $(1,1)$. O mínimo é 1 e é atingido no ponto $(1,0)$.

Questão 2. [1.5 valores] Apresente um esboço da região cuja área é dada pelo integral $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \int_0^{2\operatorname{sen}\theta} \rho\,d\rho\,d\theta$.



Questão 3. [1.5 valores] O volume do sólido cónico delimitado pelas superfícies $z^2 = 4$ e $z^2 = y^2 + x^2$ pode exprimir-se, em coordenadas cilíndricas, pela expressão integral

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_\rho^2 \rho\, dz\, d\theta\, d\rho + \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{-2}^{-\rho} \rho\, dz\, d\theta\, d\rho = 2\int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_\rho^2 \rho\, dz\, d\theta\, d\rho.$$

Questão 4. [2 valores] Considere a região R do espaço que se encontra no interior do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e é limitada pelos paraboloides $z = x^2 + y^2$ e $z = -(x^2 + y^2)$. Exprima o volume desta região:

a) usando integrais duplos: $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{2\pi} 2\rho^3\, d\theta\, d\rho = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2(x^2 + y^2)\, dy\, dx.$

b) usando integrais triplos (coordenadas cilíndricas): $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\rho^2}^{\rho^2} \rho\, dz\, d\theta\, d\rho = 2\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho^2} \rho\, dz\, d\theta\, d\rho$

III

As respostas às questões deste grupo devem ser convenientemente justificadas.

Questão 1. [3 valores] Determine e classifique os pontos críticos da função $f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$.

A função f é de classe $\mathscr{C}^\infty$ logo os pontos críticos de f são pontos onde o vetor gradiente de f se anula.

$\nabla f(x, y) = \left(3y - 3x^2, 3x - 3y^2\right)$.

$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \vee (x, y) = (1, 1)$.

A matriz hessiana de f em cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é $\begin{pmatrix} -6x & 3 \\ 3 & -6y \end{pmatrix}$.

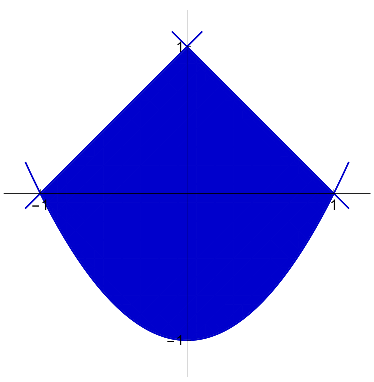
$\det \operatorname{Hess} f(0, 0) = -9 < 0$, logo $(0, 0)$ é ponto de sela.

$\operatorname{Hess} f(1, 1) = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ e o seu determinante é $27 > 0$, logo $(1, 1)$ é ponto de máximo, uma vez que $f_{xx}(1, 1) = -6 < 0$.

Questão 2. [3 valores] Considere a região $\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 - 1, y \leq 1 - x, y \leq x + 1\right\}$.

a) Esboce a região $\mathcal{D}$.

b) Calcule a área de $\mathcal{D}$ usando integrais duplos.



$$\text{Área de } \mathcal{D} = \int_{-1}^0 \int_{x^2-1}^{1+x} dy\, dx + \int_0^1 \int_{x^2-1}^{1-x} dy\, dx$$
$$= 2\int_{-1}^0 \int_{x^2-1}^{1+x} dy\, dx = 2\int_{-1}^0 \left(2 + x - x^2\right) dx$$
$$= \frac{7}{3}.$$

– ou –

$$\text{Área de } \mathcal{D} = \int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} dx\, dy + \int_0^1 \int_{y-1}^{1-y} dx\, dy$$
$$= \frac{7}{3}.$$