



Cálculo para Engenharia

Folha 2

2023'24

Generalidades sobre funções reais de uma variável real.

1. Quais das seguintes equações definem uma função, real, de uma variável real x ?

(i) $y = -(x + 1)^2$

(iii) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$

(ii) $x - y = \frac{1}{x}$

(iv) $y(x^2 + 1) = x^2 - 1$

2. Estabeleça a correspondência devida entre as leis que definem as funções e as representações gráficas.

Para cada uma das funções, determine também o domínio e o contradomínio.

(a) $y = \frac{2x^2 - 3}{7x + 4}$

(c) $y = \frac{11x + 2}{2x^3 - 1}$

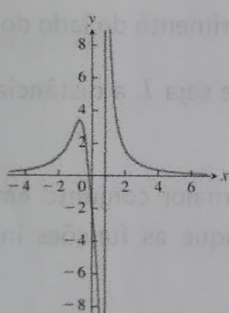
(e) $y = \sqrt[3]{x}$

(b) $y = \frac{5x^2 - 8x - 3}{3x^2 + 2}$

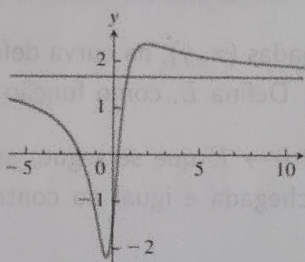
(d) $y = x^{-2}$

(f) $y = \sqrt{x^3}$

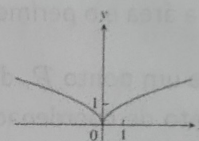
(g) $y = \sqrt[3]{x^2}$



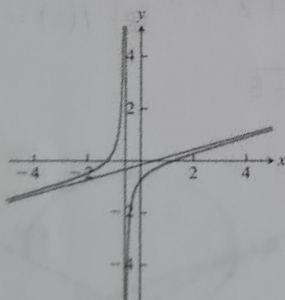
(1)



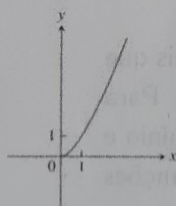
(3)



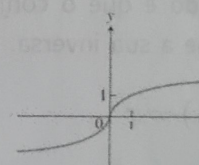
(5)



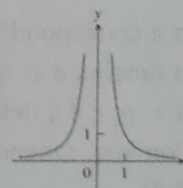
(2)



(4)



(6)



(7)

3. As alturas (em "polegadas") atingidas, na modalidade de salto à vara, nos Jogos Olímpicos de 1900, 1904, de 1908 e de 1912 tabelam-se a seguir:

t	1900	1904	1908	1912
a	130	138	146	154

(a) Esboce graficamente a função a , real de uma variável real t .

(b) Defina o domínio e o contradomínio da função a .

(c) Se a característica linear da função a se tivesse mantido após 1912 qual teria sido o recorde de salto com vara (masculino) atingido nos últimos Jogos Olímpicos?

4. Determine o domínio das funções $f + g$, $f - g$, fg , f/g quando

(a) $f(x) = \sqrt{x+5}$, $g(x) = \sqrt{x+5}$

(b) $f(x) = \sqrt{3-2x}$, $g(x) = \sqrt{x+4}$

5. Defina $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$ e $g \circ g$; e, em cada caso, determine o respetivo domínio, quando

(a) $f(x) = x^2 - 3x$, $g(x) = \sqrt{x+2}$

(b) $f(x) = \sqrt{x+15}$, $g(x) = x^2 + 2x$

6. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$. Esboce o gráfico de g quando:

(a) $g(x) = f(x) - 1$

(b) $g(x) = f(x+2)$

(c) $g(x) = \max\{f(x), 1\}$

7. Seja $D_n = \{1.2, 2, 2.3, 4.5, 6.7\}$ o domínio da função 'tecto' f , real de variável real, definida por $f(x) = \lceil x \rceil$

(a) Represente f numa tabela.

(b) Considere um prolongamento, g , de f a $\mathcal{D} = [-2, 7]$, de tal forma que $g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \geq 0 \\ \lfloor x \rfloor, & \text{se } x < 0. \end{cases}$

Represente graficamente g .

(c) Para que valores de $x \in \mathbb{R}$ se tem $\lceil x \rceil = 0$? E $\lfloor x \rfloor = 0$?

8. Expresse a área e o perímetro de um triângulo equilátero, como função do comprimento do lado do triângulo.

9. Considere um ponto $\mathcal{P}$, de coordenadas (x, y) , na curva definida $2x + 4y = 5$ e seja L a distância do ponto $\mathcal{P}$ ao ponto de coordenadas $(0, 0)$. Defina L , como função de x .

10. Para cada uma das funções $f : D \rightarrow E$ que se segue, assuma que D é o maior conjunto em que a lei faz sentido e que o conjunto de chegada é igual ao contradomínio. Identifique as funções invertíveis e determine a sua inversa:

(a) $f(x) = x$

(c) $f(x) = x - 3$

(e) $f(x) = \sqrt{x+2}$

(g) $f(x) = \frac{1}{x^3 + 2}$

(b) $f(x) = x^2$

(d) $f(x) = x^3$

(f) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 5}$

11. Estabeleça a correspondência devida entre as leis que definem as funções e as representações gráficas. Para as funções s , p , c e q determine também o domínio e os contradomínio, sabendo que o domínio das funções f e g é $[0, 1]$.

(a) $f(x) = \sqrt{x}$.

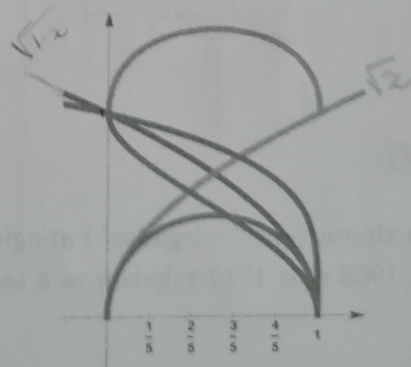
(d) $p(x) = (f \cdot g)(x)$.

(b) $g(x) = \sqrt{1-x}$.

(e) $c(x) = (f \circ g)(x)$.

(c) $s(x) = (f + g)(x)$.

(f) $q(x) = \frac{f}{g}(x)$.



12. Expresse, usando o conceito de função composta, a diferença entre $\cos x^2$, $\cos^2 x$ e $\cos(\cos x)$.

13. Estabeleça as seguintes igualdades, válidas para qualquer $x \in \mathbb{R}$:

(a) $\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$

(b) $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

(c) $\cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$

14. Resolva as equações seguintes (fazendo eventualmente uso de algumas das igualdades estabelecidas no exercício anterior):

(a) $\sin(2x) = \frac{1}{2}$

(b) $\sqrt{3} \sin(3x) + \cos(3x) = 2$

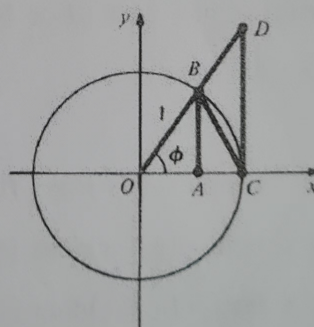
(c) $4 \cos^3 x - 3 \cos x = \frac{1}{2}$

15. A partir da informação recolhida da figura,

prove que

a) $\cos \phi < \frac{\sin \phi}{\phi} < 1$

b) $\frac{1}{2} \sin \phi < \frac{\phi}{2} < \frac{1}{2} \tan \phi$



16. Determine o período de cada uma das funções definidas por

(a) $f(x) = \cos \pi x$.

(b) $f(x) = \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$

(c) $f(t) = -\operatorname{tg} \left(\frac{t}{2} \right)$.

14. Resolva as equações seguintes (fazendo eventualmente uso de algumas das igualdades estabelecidas no exercício anterior):

(a) $\sin(2x) = \frac{1}{2}$

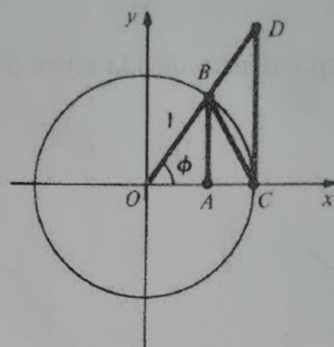
(b) $\sqrt{3}\sin(3x) + \cos(3x) = 2$

(c) $4\cos^3 x - 3\cos x = \frac{1}{2}$

15. A partir da informação recolhida da figura, prove que

(a) $\cos \phi < \frac{\sin \phi}{\phi} < 1$

(b) $\frac{1}{2} \sin \phi < \cos \phi < \frac{\phi}{2} < \frac{1}{2} \tan \phi$



16. Determine o período de cada uma das funções definidas por

(a) $f(x) = \cos \pi x$.

(b) $f(x) = \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$

(c) $f(t) = -\tan \left(\frac{t}{2} \right)$.

17. Calcule

(a) $\arcsin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

(d) $\sin \left(\arcsin \left(-\frac{1}{2} \right) \right)$

(g) $\sec \left(\arccos \left(\frac{1}{2} \right) \right)$

(b) $\arccos \left(-\frac{1}{2} \right)$

(e) $\arcsin \left(\sin \left(\frac{7\pi}{6} \right) \right)$

(h) $\tan \left(\arcsin \left(-\frac{1}{2} \right) \right)$

(c) $\arctg(-1)$

(f) $\cos \left(\arccos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)$

18. Deduza as seguintes igualdades em domínios que deverá especificar:

(a) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$

(c) $\arccos x + \arccos(-x) = \pi$

(b) $\tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

(d) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

Funções exponenciais e logarítmicas.

19. Qual dos números é maior?

(a) $2^{\sqrt{5}}$ ou $4^{\sqrt{2}}$?

(b) $8^{\sqrt{\pi}}$ ou $2^{3\pi}$?

(c) $2^{\sqrt{3}}$ ou $3^{\sqrt{2}}$?

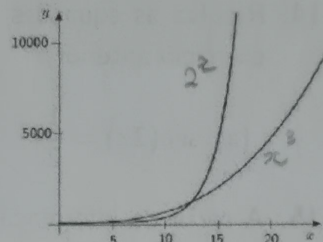
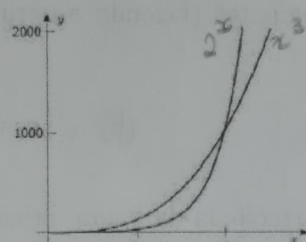
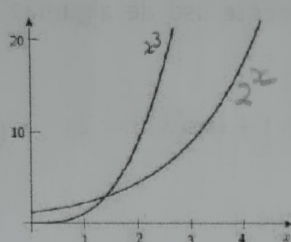
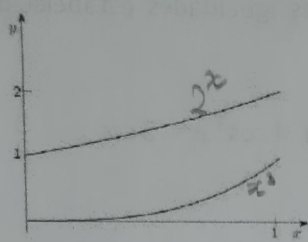
(d) $3^{\sqrt{2}}$ ou $9^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$?

20. Que relação existe entre $\log_b c$ e $\log_a b$? $\log_2 4 = 2$ $\log_4 2 = \frac{1}{2}$

21. Em linguagem corrente usa-se a expressão "crescimento exponencial" como sinónimo de um crescimento muito rápido. Analise as seguintes representações gráficas e

(a) selecione, para cada uma das figuras, a curva que representa graficamente a função potência (definida, neste caso, por $y = x^3$) e a função exponencial (definida, neste caso, por $y = 2^x$).

(b) reflita sobre o que pode, em rigor, ser dito quando comparamos uma função exponencial com uma função potência.



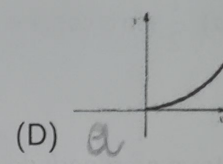
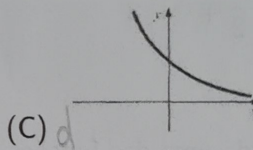
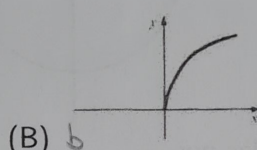
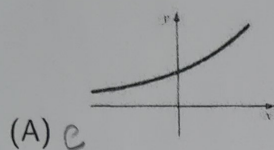
22. Estabeleça a correspondência devida entre as leis que definem as funções e as representações gráficas

(a) $y = x^{\sqrt{3}}$

(b) $y = x^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

(c) $y = \sqrt{3}^x$

(d) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x = \frac{1}{(\sqrt{3})^x}$



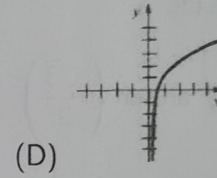
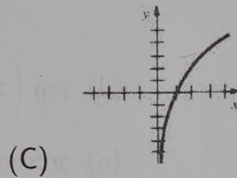
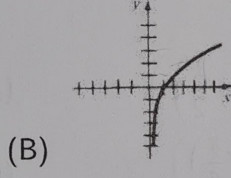
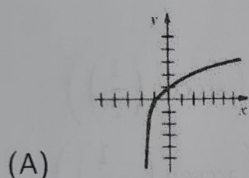
23. Estabeleça a correspondência devida entre as leis que definem as funções e as representações gráficas

(a) $y = \log_2(x)$

(b) $y = 2 \log_2(x)$

(c) $y = \log_2(x + 2)$

(d) $y = \log_2(2x)$



24. Resolva as seguintes equações:

(a) $3^y = 2^{y+1}$

(b) $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$

(c) $e^{3x} - 2e^{-x} = 0$

(d) $\log_x 5 = 0$

(e) $\log_2(x^2) = 4$

(f) $\ln(10 \ln y) = \ln(5x)$, em ordem a y .

Funções hiperbólicas diretas e inversas.

25. Demonstre as seguintes igualdades:

(a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

(b) $\cosh x + \sinh x = e^x$

(c) $\sinh(-x) = -\sinh x$

(d) $\cosh(-x) = \cosh x$

(e) $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

(f) $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

26. Reescreva as seguintes igualdades, em termos de funções exponenciais e simplifique o resultado

(a) $2 \cosh(\ln x)$

(b) $\sinh(2 \ln x)$

(c) $2 \cosh(5x) + \sinh(5x)$

(d) $\ln(\cosh x + \sinh x) + \ln(\cosh x - \sinh x)$

27. Demonstre as seguintes igualdades, registrando o domínio onde se verificam:

(a) $\operatorname{argcosech} x = \ln \left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{|x|} \right)$

(b) $\operatorname{argcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

(c) $\operatorname{argtanh} x = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

(d) $\operatorname{argcotanh} x = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

slides 26/01

pag 33/44

notações bijectivas